

*Драгуновский Н.Н., Царенко А.П.*

*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова*

### **Особенности течения жидкости переменной вязкости в круглой трубе**

*Подробно исследовано течение жидкости в круглой трубе с учетом вязкой диссипации и экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. Получены предельные значения параметров задачи и установлена их зависимость от условий теплообмена потока жидкости с внешней средой. Рассмотрены качественные и количественные отличия от случая течения жидкости с постоянной вязкостью. Указаны перспективные направления дальнейших исследований по данной проблеме.*

Существует класс течений, а именно устойчивые согласно линейной теории течения, для которых неизвестен общепринятый механизм неустойчивости. Примерами течений такого рода являются плоское течение Куэтта и течение Хагена-Пуазейля в трубе круглого сечения [1].

С другой стороны, из экспериментов известно [1], что в потоках ньютоновских жидкостей в круглой трубе турбулентность уже может возникнуть при числах Рейнольдса, близких всего лишь к 2000.

Основным допущением при моделировании указанных течений являются: бесконечная удаленность границ от рассматриваемого участка (например, торцов трубопровода) и неизменность теплофизических характеристик самой жидкости. Учет конечности границ делает математическую задачу практически неразрешимой, поэтому приблизиться к решению данной проблемы можно с позиций модели жидкости с переменной вязкостью.

Учет переменной теплопроводности жидкости или ее плотности не представляется существенным ввиду их слабой зависимости в обычных условиях от изменений температуры.

Качественный анализ течений с постоянной и переменной вязкостью в стационарной постановке позволит выяснить главные направления в дальнейших исследованиях этих течений на их гидродинамическую устойчивость.

В настоящей работе рассматривается стационарное напорное течение ньютоновской жидкости в неподвижной круглой трубе с учетом зависимости вязкости от температуры, теплоты вязкого трения и теплообмена с внешней средой. Исследование проводится без учета температурных изменений плотности и теплопроводности жидкости, а также влияния концов трубопровода на установившееся течение вдали от них. При условиях, обеспечивающих отсутствие градиента температур вдоль оси трубопровода, и, пренебрегая действием сил тяготения, считаем поток жидкости в круглой трубе ламинарным и симметричным относительно ее оси.

Математическая постановка данной задачи [2] записывается в цилиндрической системе координат  $(r, \varepsilon, z)$ , ось  $Oz$  которой совпадает с осью трубопровода и направлена по потоку жидкости. Из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и принятых допущений следует, что вектор скорости  $\vec{V}$  будет представлен лишь осевой составляющей  $V_z$ , которая, равно как температура и вязкость, будет функцией только радиальной координаты  $r$ .

Таким образом, искомые стационарные профили скорости и температуры являются решениями следующей нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения и теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \mu \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{dP}{dz}, \\ \frac{\lambda_0}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \mu \left( \frac{dV_z}{dr} \right)^2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $V_z(r)$ ,  $\mu(r)$ ,  $T(r)$ ,  $P(z)$  – соответственно скорость, динамическая вязкость, абсолютная температура и давление в движущейся жидкости,  $\lambda_0$  – постоянный коэффициент теплопроводности.

Из уравнения движения следует, что градиент давления  $dP/dz$  постоянен вдоль оси трубопровода  $Oz$ , а поскольку данное течение жидкости полностью им обусловлено, то в дальнейшем величину градиента  $dP/dz$  считаем известной и заданной в качестве исходного параметра задачи.

Из физических соображений следует, что скорость и температура жидкости достигают на оси своих максимальных, но в то же время, конечных значений. Поэтому мы можем потребовать выполнения следующих условий на оси трубопровода:

$$\frac{dV_z}{dr} = 0, \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{при } r = 0. \quad (2)$$

Стационарный теплообмен с внешней средой, имеющей температуру  $T_0$ , будем моделировать граничным условием третьего рода [3], предполагая теплопроводность материала трубопровода весьма большой по сравнению с такой для жидкости и внешней среды, и предполагая стенки трубопровода тонкими по сравнению с внутренним радиусом  $R$ :

$$R \frac{dT}{dr} = -Bi \cdot (T - T_0), \quad \text{при } r = R, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус трубопровода,  $Bi = \alpha_0 R / \lambda_0$  – критерий Био [3], характеризующий интенсивность теплообмена на поверхности трубы,  $\alpha_0$  – коэффициент теплоотдачи во внешнюю среду.

Прилипание вязкой жидкости к внутренней поверхности трубопровода дает условие

$$V_z(R) = 0. \quad (4)$$

Краевая задача (1)–(4) должна замыкаться какой-либо теоретической зависимостью вязкости жидкости от ее температуры:

$$\mu = \mu(T). \quad (5)$$

Прежде чем приступить к непосредственному поиску решений краевой задачи (1)–(5), запишем ее постановку в безразмерной форме. Введем новые безразмерные координату  $\xi = r/R$  и функции:

$$U(\xi) = \frac{R\rho_0}{\mu_0} V_z, \quad \theta(\xi) = \frac{T-T_0}{T_0}, \quad M(\xi) = \frac{\mu(\theta)}{\mu_0}, \quad (6)$$

где  $\rho_0, \mu_0, \lambda_0$  – плотность, вязкость и теплопроводность жидкости при температуре внешней среды  $T_0$ .

В силу постоянства перепада давления  $dP/dz$  первое уравнение системы (1) можно один раз проинтегрировать с граничным условием (2) и записать краевую задачу в безразмерной постановке в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{d\xi} = b_0 \cdot \frac{\xi}{M(\xi)}, \quad U|_{\xi=1} = 0; \\ \xi \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\theta}{d\xi} \right) + a_0 \cdot \frac{\xi^4}{M(\xi)} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -\text{Bi} \cdot \theta|_{\xi=1}; \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $b_0 = \frac{\rho_0 R^3}{2\mu_0^2} \frac{dP}{dz}$ ,  $a_0 = \frac{R^4}{4\mu_0 \lambda_0 T_0} \left( \frac{dP}{dz} \right)^2$  – безразмерные комбинации из входных параметров задачи.

Для интегрирования полученной системы уравнений нам необходимо выбрать конкретный вид зависимости (5) вязкости от температуры, т.е. задать физическую кинетику процесса диссипации механической энергии в тепловую.

Важность этой кинетики раскрывается уже непосредственно из первого уравнения системы (7). Именно в этом уравнении содержится факт возможного наличия точки перегиба на профиле скорости для жидкости, движущейся в круглой трубе под действием перепада давления.

Очевидно, что для случая течения Хагена-Пуазейля [2], когда вязкость жидкости принимается постоянной, т.е.  $M(\xi) \equiv 1$ , профиль скорости  $U(\xi)$  точкой перегиба не обладает.

В рассматриваемом случае, когда мы учитываем зависимость вязкости от температуры, координата точки перегиба  $\xi_U$  будет корнем уравнения

$$M(\xi_U) - \xi_U \cdot M'(\xi_U) = 0. \quad (8)$$

Влияние точки перегиба на характер устойчивости вязких течений показано в [4,5], поэтому сам факт присутствия такой точки в представленной математической модели вязкого течения свидетельствует в пользу целесообразности его дальнейшего изучения.

Использующиеся в литературе [6–8] зависимости вязкости от температуры можно условно разделить на: эмпирические (построенные на основе таблиц для

конкретных жидкостей) и теоретические, являющиеся, как правило, асимптотиками известного [9] закона

$$\mu(T) = A \cdot \exp(E/T). \quad (9)$$

Поскольку данное исследование носит теоретический характер, остановимся именно на законе (9) и его некоторых асимптотиках.

В безразмерной форме закон (9) имеет вид:

$$M(\xi) = \frac{\mu}{\mu_0} = \exp\left(\frac{-\delta_0 \theta}{1+\theta}\right), \quad \mu_0 = A \cdot \exp(\delta_0), \quad \delta_0 = \frac{E}{T_0}. \quad (10)$$

Физический смысл параметра  $\delta_0$  следует из следующего выражения:

$$\delta_0 = -\frac{d[\ln(\mu)]}{d[\ln(T)]} \quad \text{при } T = T_0.$$

Таким образом, величина  $\delta_0$  для данной жидкости характеризует интенсивность изменения вязкости при изменении ее температуры.

Необходимо отметить, что  $\delta_0$  является ключевым параметром краевой задачи (7),(10). Параметр  $\delta_0$  обеспечивает обратную связь между термодинамическим состоянием движущейся жидкости и ее динамическими характеристиками, при этом математическая постановка требует совокупного интегрирования уравнений движения и баланса тепла.

Постановка задачи, в которой вязкость жидкости предполагается постоянной, т.е.  $\delta_0 = 0$ , лишена упомянутой обратной связи. В результате динамика такого течения не зависит как от теплового состояния движущейся жидкости, которое формируется благодаря вязкой диссипации, так и от условий теплообмена с внешней средой.

Учет (10) приводит задачу (7) к следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{d\xi} = b_0 \xi \cdot \exp\left(\frac{\delta_0 \theta}{1+\theta}\right), \quad U|_{\xi=1} = 0; \\ \xi \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\theta}{d\xi} \right) + a_0 \xi^4 \cdot \exp\left(\frac{\delta_0 \theta}{1+\theta}\right) = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -\text{Bi} \cdot \theta|_{\xi=1}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Интегрирование полученной системы (11) представляет определенные математические трудности, поэтому ограничимся в дальнейшем изучением стационарных режимов течения с малым диссипативным разогревом жидкости ( $\theta \ll 1$ ), что позволит, сохранив экспоненциальный характер зависимости (10), упростить его функциональный вид:

$$M(\xi) = \exp(-\delta_0 \theta). \quad (12)$$

Тогда для безразмерного профиля температур  $\theta(\xi)$  можно записать следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \xi \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d(\delta_0 \theta)}{d\xi} \right) + 8a\xi^4 \exp(\delta_0 \theta) = 0, \\ \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=1} = -\text{Bi} \cdot \theta|_{\xi=1}, \end{cases} \quad (13)$$

где  $a = \delta_0 a_0 / 8$  – безразмерный параметр задачи.

Замена [6] вида  $x = \ln(a\xi^4)$ ,  $y(x) = x + \delta_0 \theta$  приводит (13) к простому дифференциальному уравнению  $2y'' + \exp(y) = 0$  с первым интегралом  $(y')^2 = c_1 - \exp(y)$ .

Значение постоянной  $c_1 = 1$  определяется из условия регулярности температурного профиля на оси трубопровода. Таким образом, дифференциальное уравнение для  $y(x)$  принимает вид  $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 - \exp(y)}$ .

Очевидно, что приемлемо только  $\exp(y) \leq 1$  или, что то же  $y \leq 0$ , откуда вытекает  $\delta_0 \theta \leq -\ln(a\xi^4)$ . Поскольку левая часть всегда неотрицательна, то необходимо потребовать, чтобы  $a\xi^4 \leq 1$ .

Безразмерная пространственная переменная  $\xi \in [0,1]$ , следовательно, неотрицательность подкоренного выражения  $1 - \exp(y)$  возможна при  $a \leq 1$ .

Следовательно, при значениях параметра  $a > 1$  отсутствует решение задачи (13), а с ним и решение задачи о стационарном напорном неизотермическом течении ньютоновской жидкости в круглой трубе, когда ее вязкость изменяется по закону (12).

Распределение температур вдоль радиуса трубы найдено [6] в виде:

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\delta_0} \ln \left[ \frac{4c}{a} \cdot (1 + c\xi^4)^{-2} \right], \quad (14)$$

где  $c$  – константа интегрирования, определяемая из уравнения

$$\frac{8c}{1+c} = \text{Bi} \cdot \ln \left( \frac{4c}{a \cdot (1+c)^2} \right), \quad (15)$$

получаемого из граничного условия (3) теплообмена с внешней средой.

Интегрирование уравнения  $\frac{dU}{d\xi} = b_0 \frac{4c}{a} \frac{\xi}{(1+c\xi^4)^2}$  с условием  $U(1) = 0$  дает

$$U(\xi) = b_0 \frac{c}{a} \left( \frac{\xi^2}{1+c\xi^4} - \frac{1}{1+c} + \frac{\arctan(\sqrt{c}\xi^2) - \arctan(\sqrt{c})}{\sqrt{c}} \right). \quad (16)$$

Профиль вязкости жидкости получаем подстановкой решения (14) в (12):

$$M(\xi) = \frac{a}{4c} (1 + c\xi^4)^2. \quad (17)$$

По известному распределению скоростей (16) можно подсчитать секундный объемный расход жидкости через трубопровод и найти среднюю по площади сечения скорость потока:

$$U_{cp} = -b_0 \cdot \frac{c}{(1+c) \cdot a}. \quad (18)$$

Если вернуться к (6) и вспомнить, что  $U(\xi) = \frac{R\rho_0}{\mu_0} V_z$ , то становится очевидным физический смысл (18). Величину  $U_{cp}$  можно трактовать как  $Re$  – число Рейнольдса [2] для данного стационарного течения жидкости переменной вязкости.

Формулу (16) с учетом (18) можно переписать в виде

$$U(\xi) = U_{cp} \left( 1 - \frac{(1+c)\xi^2}{1+c\xi^4} + \frac{\arctan(\sqrt{c}) - \arctan(\sqrt{c}\xi^2)}{\sqrt{c}} (1+c) \right). \quad (19)$$

Из физических соображений следует, что найденные распределения  $M(\xi)$ ,  $U(\xi)$ ,  $\theta(\xi)$  имеют экстремумы на оси трубопровода ( $\xi = 0$ ), где вязкость достигает минимального, а скорость и температура жидкости – максимальных значений:

$$M_{\min} = \frac{a}{4c}, \quad U_{\max} = -b_0 \frac{c}{a} \left( \frac{1}{1+c} + \frac{\arctan(\sqrt{c})}{\sqrt{c}} \right), \quad \theta_{\max} = \frac{1}{\delta_0} \ln \left( \frac{4c}{a} \right). \quad (20)$$

Полученное решение (14)–(17) о стационарном напорном течении жидкости переменной вязкости в круглой трубе однозначно определяется набором из четырех независимых безразмерных параметров  $\delta_0$ ,  $Bi$ ,  $a$ ,  $b_0$ .

Отмеченный выше факт ограничения  $0 < a \leq 1$  допустимого значения параметра  $a$  указывает на необходимость более детального исследования пределов существования рассматриваемого решения (14)–(17).

Преобразуем соотношение (15) к виду

$$a = \frac{4c}{(1+c)^2} \exp \left( -\frac{8c}{Bi \cdot (1+c)} \right). \quad (21)$$

Исследуем поведение функции  $a = a(c, Bi)$  при фиксированном значении критерия  $Bi$  (т.е. при заданных условиях теплообмена с внешней средой).

Из физических соображений вытекает, что функция (21) является непрерывной и неотрицательной, поскольку постоянная  $c \geq 0$ . Анализ следующих формул

$$\frac{d[\ln(a)]}{d[\ln(c)]} = \frac{1 - \frac{8}{Bi}c - c^2}{(1+c)^2}, \quad \frac{d^2[\ln(a)]}{d[\ln(c)]^2} = \frac{c}{(1+c)^3} \left( \frac{8}{Bi} (c-1) - 2(1+c) \right),$$

позволяет сделать вывод о том, что функция  $a(c)$  ограничена и достигает своего максимума

$$a_* = \frac{4c_*}{(1+c_*)^2} \exp \left( -\frac{8c_*}{Bi \cdot (1+c_*)} \right) \quad \text{при} \quad c_* = \sqrt{1 + \frac{16}{Bi^2}} - \frac{4}{Bi}. \quad (22)$$

Кроме того, при  $c \rightarrow 0$  и  $c \rightarrow \infty$  имеет место  $a \rightarrow 0$ .

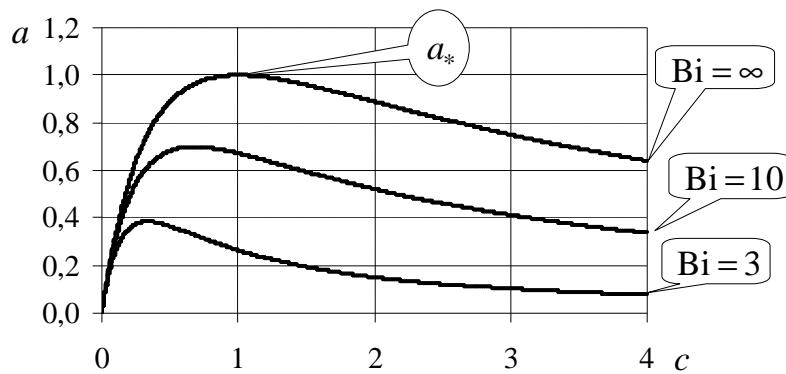


Рис 1. Зависимость  $a = a(c)$  при различных значениях критерия  $Bi$ .

Следовательно, любому значению параметра  $a$  из интервала  $[0, a_*[$  соответствуют два возможных значения константы интегрирования  $c$ , причем одно из них  $c' \in [0, c_*[$ , а другое  $c'' \in ]c_*, \infty[$ , т.е.  $a(c') = a(c'')$ .

Таким образом, имеются две ветви решения (14), которые определяются константами  $c'$  и  $c''$ . Указанные ветви “сливаются” в точке экстремума  $c_*$ , где решение уже носит предельный характер (см. Рис. 1.)

Поясним сказанное следующим образом – предельное значение параметра  $a_*$  является, равно как и  $c_*$ , функцией критерия Био, т.е. полностью определяется интенсивностью процесса теплообмена движущейся жидкости с внешней средой.

Поскольку  $a = \frac{\delta_0 R^4}{32\lambda_0 T_0 \mu_0} \left( \frac{dP}{dz} \right)^2$ , то при фиксированных характеристиках

жидкости и выбранных условиях теплообмена, предельность значения параметра  $a_*$  следует понимать как максимально возможный перепад давления  $(dP/dz)_*$  вдоль оси трубы (максимальный расход жидкости) при котором еще справедливо стационарное решение задачи (14)–(17).

Задание перепада давления, превышающего  $(dP/dz)_*$  приведет, благодаря вязкой диссипации, к возникновению добавочного теплового потока вдоль радиуса трубопровода.

Выделенное тепло, в силу принятых условий теплообмена, уже не будет отводиться во внешнюю среду и приведет, в конечном итоге, к гидродинамическому тепловому взрыву [10].

Из (22) следует, что наибольшие значения предельных параметров  $a_* = 1$  и  $c_* = 1$  достигаются при  $Bi = \infty$  (см. Рис.1), т.е. при наличии беспрепятственного отвода диссипируемого тепла во внешнюю среду.

Увеличение же теплоизолированности потока жидкости (уменьшение числа  $Bi$ ) влечет уменьшение как  $a_*$ , так и  $c_*$ , а с ними и предельно допустимого значения для перепада давления  $(dP/dz)_*$  вдоль оси трубы.

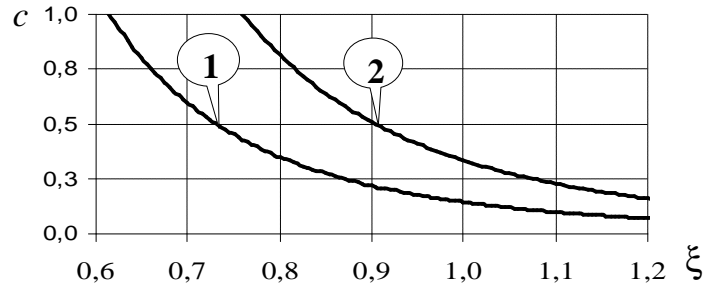


Рис. 2 Координаты точек  $\xi_U$ –(1) и  $\xi_E$ –(2) как функции константы  $c$ .

При полной теплоизоляции, когда  $Bi=0$ , будем иметь  $c_* = 0$ ,  $a_* = 0$ ,  $(dP/dz)|_* = 0$ , т.е. стационарный режим течения жидкости переменной вязкости в принципе не может быть реализован.

Как было отмечено выше, решения  $c'$  и  $c''$  уравнения (21) определяют два возможных режима стационарного течения жидкости переменной вязкости в круглом трубопроводе.

Значение  $c_*$  является общим и предельным для обоих режимов, будучи для  $c'$ –ветви наибольшим, а для  $c''$  – наименьшим.

Если преобразовать соотношение (21) к виду

$$\frac{c}{a} = \frac{(1+c)^2}{4} \exp\left(\frac{8c}{Bi \cdot (1+c)}\right)$$

и подставить его в формулы (18) и (20), то окажется, что увеличение параметра  $a$  (т.е.  $dP/dz$ ) для  $c''$ – ветви вызовет уменьшение расхода жидкости и диссипации механической энергии, а с ними соответствующих значений скорости и температуры на оси трубы.

Последнее противоречит известным физическим наблюдениям и позволяет нам утверждать, что  $c''$ – ветвь имеет чисто математическую природу.

Необходимо здесь же отметить, что предельный переход к решению Хагена-Пуазейля ( $\delta_0 \rightarrow 0$ ) возможен только для  $c'$ – ветви. Поэтому в дальнейшем значение  $c'$  будем отождествлять с константой интегрирования  $c$ .

Еще одной особенностью исследуемого течения и его качественным отличием от случая постоянной вязкости [6] служит наличие точки перегиба  $\xi_U$  на профиле скорости и существование точки максимума энергии диссипации  $\xi_E$ , координаты которых равны соответственно:  $\xi_U = \sqrt[4]{1/7c}$ ,  $\xi_E = \sqrt[4]{1/3c}$ , причем  $\xi_U < \xi_E$ . Точка перегиба профиля скорости попадает в область течения ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) только при условии  $c \geq 1/7$  (см. рис. 2).

Анализ полученного решения (14)–(17) можно завершить сопоставлением характеристик стационарного потока, полученных с учетом переменности вязкости и когда ею пренебрегают ( $\delta_0 = 0$ ).



Безразмерные профили скорости и температуры для течения в круглой трубе жидкости с постоянной вязкостью с учетом масштабов (6), можно записать в виде

$$U^0(\xi) = -b_0 \frac{1-\xi^2}{2}, \quad \theta^0(\xi) = \frac{a_0}{16} \left( \frac{4+Bi}{Bi} - \xi^4 \right),$$

где сохранены ранее выбранные масштабы основных характеристик жидкости и задачи в целом.

Распределение скоростей  $U^0(\xi)$  не зависит от термодинамического состояния движущейся жидкости и в точности совпадает с классическим профилем Хагена–Пуазейля [2]. Очевидно, что средняя по площади сечения трубопровода скорость будет равна  $U_{cp}^0 = -b_0/4$ .

Возьмем отношение средних скоростей

$$\frac{U_{cp}}{U_{cp}^0} = (1+c) \cdot \exp \left[ \frac{8c}{Bi \cdot (1+c)} \right]$$

и максимальных температур

$$\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\max}^0} = \frac{Bi}{4+Bi} \cdot \frac{(1+c)^2}{c} \cdot \left[ \frac{4c}{Bi \cdot (1+c)} + \ln(1+c) \right] \cdot \exp \left[ \frac{8c}{Bi \cdot (1+c)} \right].$$

Последние формулы при  $Bi = \infty$  на пределе решения с переменной вязкостью дают соответственно:  $U_{cp}/U_{cp}^0 = 2$  и  $\theta_{\max}/\theta_{\max}^0 = 4 \ln(2)$ .

Для произвольных чисел  $Bi$  подобный сравнительный анализ проводился численным путем.

Полученные результаты продемонстрировали наличие ряда качественных и количественных отличий течения жидкости с переменной вязкостью от случая течения с постоянной вязкостью. Это указывает на целесообразность проведения исследования на гидродинамическую устойчивость распределений (14)–(17), полученных для зависимости (12), и сравнения его результатов с таковыми для течения с постоянной вязкостью.

Кроме того, следует разработать методику численного решения краевой задачи (11) с целью выяснения особенностей такого течения по отношению к решению, рассмотренному в настоящей работе.

#### Литература:

1. Ди Прима Р., Стюарт Дж. Гидродинамическая устойчивость // Успехи прикладной механики: Сб. статей. 1983–84 гг. – М.: Мир, 1986. – 284 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
3. Лыков А.В. Теплообмен. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
4. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Изд. иностр. лит., 1958. – 194 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 711 с.

6. *Асланов С.К.* Течение жидкости переменной вязкости в круглом трубопроводе // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 1961. – №12. – С.83-88.
7. *Асланов С.К.* О границах стационарного режима и устойчивости ламинарного течения жидкости в круглой трубе с учетом температурной зависимости вязкости и теплообмена // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 1963. – №1. – С.77-80.
8. *Каганов С.А., Яблонский В.С.* О профиле скоростей ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и изменения коэффициента вязкости от температуры // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 1960. – №1. – С.85-92
9. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. – Л.: Наука, 1975. – 592 с.
10. *Бостанджиян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И.* О гидродинамическом тепловом взрыве // Доклады АН СССР. – 1965 – Т.163, №1. – С.133-136.

*Драгуновський М.М., Царенко О.П.*

### **Особенности течения жидкости с переменной вязкостью в круглом трубопроводе**

#### АНОТАЦІЯ

*Детально досліджено течію рідини у круглому трубопроводі із врахуванням в'язкої дисипації та експоненціальної залежності в'язкості від температури. Отримані граничні значення параметрів задачі та встановлено їх залежність від умов теплообміну потоку рідини із зовнішнім середовищем. Розглянуті якісні та кількісні відмінності від випадку течії рідини із незмінною в'язкістю. Вказані перспективні напрямки подальших досліджень за даною проблемою.*

*Dragunovsky N.N., Tsarenko A.P.*

### **Peculiarities of a variable viscosity fluid flow in circular pipe**

#### SUMMARY

*Fluid flow in the circular pipe was studied with account of viscous dissipation and viscosity exponential temperature dependence. The problem parameters limit values were obtained and their dependence on the fluid flow heat exchange with environment was established. The qualitative and quantitative distinctions between variable and constant viscosity fluid flows were considered. The perspective directions of further investigations on this problem were indicated.*