

**Асланов С.К.**

*Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова,  
кафедра теоретической механики*

### **К теории неустойчивости фронта газовой детонации**

*Раскрывается принципиальная некорректность получения широко известного критерия неустойчивости детонационных волн. Соответствующий математический анализ позволяет получить правильный результат.*

Теоретическое объяснение экспериментально наблюдаемой внутренней пространственно-временной структуры детонационного процесса, распространяющегося в газовых смесях, было дано в [1,2]. С этой целью исследовалась устойчивость стационарной плоской детонационной волны по отношению к искривляющим ее возмущениям. В качестве модели процесса детонации использовался стационарный двухфронтный комплекс, состоящий из ударной волны и следующей за ней на фиксированном расстоянии  $l_1$  плоскости мгновенного воспламенения. Зона индукции химреакции, разделяющая эти два фронта, характеризуется временем задержки, которое в данном случае идентично времени реакции. Его величина  $t$ , будучи, вообще говоря, обратно пропорциональной скорости реакции, в рамках закона Аррениуса представляется выражением

$$\tau(T) = K \exp(E_a / RT), \quad (1)$$

если ограничиться главной температурной зависимостью. Здесь  $E_a$  – энергия активации химической реакции,  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – местная температура.

В рассматриваемой простейшей стационарной модели исходная горючая смесь, сжатая в ударном фронте до давления  $p_1$  и нагретая до температуры  $T_1$ , не реагирует при этих значениях, то есть на протяжении всей зоны индукции. Затем по истечении периода задержки  $\tau_1 = \tau(T_1) = K \exp(E_a / RT_1)$  она во фронте сгорания (скачке разрежения) мгновенно преобразуется в конечные продукты с параметрами  $p_2 < p_1$  и  $T_2 > T_1$ , отвечающими самоподдерживающемуся режиму детонации Жугэ. Таким образом, используемая модель базируется на предположении

$$E_a / (RT_1) \gg 1, \quad (2)$$

делающем скорость химической реакции во всем промежутке индукции исчезающе малой за счет большой энергии активации:  $\exp(-E_a / RT_1) \ll 1$ . При этом период задержки воспламенения  $\tau_1 = K \exp(E_a / RT_1)$  играет роль основного модельного масштаба детонационного процесса, определяя протяженность зоны индукции  $l_1 = V_1 \tau_1$ , где  $V_1$  – скорость движения ударно-сжатой исходной смеси.

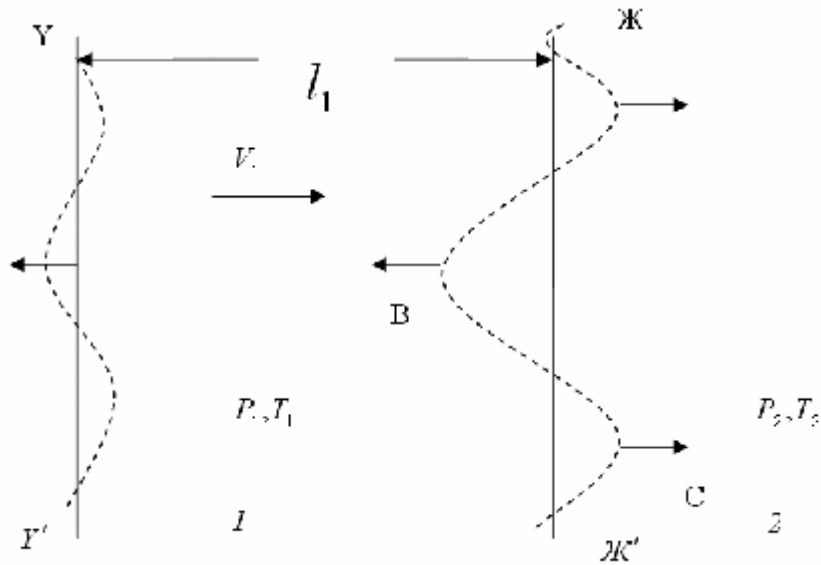


Рис. 1 Схема модели процесса

Период индукции воспламенения согласно (1) будет испытывать соответствующее изменение  $\Delta\tau$  относительно своего стационарного значения  $\tau_1$ , если температура ударно-сжатой смеси «1» получает по отношению к  $T_1$  некоторое возмущение  $\Delta T$  (в частности, за счет неоднородности ее состава) в направлении, поперечном к распространению детонационной волны ( $D$ ).

В результате фронт сгорания  $ЖЖ'$ , представляющий ее заднюю границу, приобретает извилистую форму  $ABC$  (рис. 1, пунктир).

Под действием разности давлений  $(p_1 - p_2) > 0$  исходная смесь «1», попавшая во впадины  $A(C)$ , будет адиабатически расширяться в сторону окружающих продуктов «2», охлаждаясь при этом. Напротив, продукты «2», попавшие в выступ  $B$ , будут адиабатически сжиматься и нагреваться, подвергаясь обжатию со стороны окружающего ударно-сжатого газа «1» под действием того же перепада давления.

Такое приращение (снижение) температуры газа в выступах (впадинах) влечет за собой соответственно уменьшение (увеличение) задержки воспламенения  $\tau$ , а значит, протяженности зоны индукции  $l_1$ . Это, в свою очередь, приводит к росту амплитуды волнообразования  $ABC$  на фронте сгорания  $ЖЖ'$ , ускоряя (замедляя) соответствующие участки переднего ударного фронта  $YY'$ . Наибольшей величины адиабатическое охлаждение газа во впадинах  $A(C)$  будет достигать в предельном случае, когда перепад давления  $(p_1 - p_2)$  полностью разгрузится. Тогда, пользуясь адиабатой Пуассона и уравнением Клапейрона, получим

$$\Delta T_{\max} = T_a - T_1 = -T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right], \quad (3)$$

где  $T_a$  – температура адиабатического расширения,  $\gamma$  – отношение теплоемкостей

Тем самым детонационная волна в целом оказывается покрытой прогрессивно нарастающими со временем волнообразными искажениями первоначально плоской стационарной формы. В качестве требования, достаточного для обеспечения такой неустойчивости, было предложено следующее условие:

$$\Delta\tau \geq \tau_1, \quad (4)$$

Однако дальнейший вывод количественного критерия существенно базируется на принципиальной математической некорректности, что ставит под сомнение окончательный результат. Ниже удастся устранить вскрытую ошибку, и с помощью правильного математического анализа, исправить известный критерий Щелкина для неустойчивости детонации.

Разложение в ряд Тейлора левой части (4) содержит лишь главный линейный член [1,2]

$$\Delta\tau = \left. \frac{d\tau}{dT} \right|_{T=T_1} (T - T_1), \quad (5)$$

что отождествляет  $\Delta\tau$  с дифференциалом  $d\tau$  функции  $\tau(T)$  в точке  $T = T_1$ , который является бесконечно малой величиной. Последняя, по определению, есть переменная величина, которая при  $T \rightarrow T_1$  имеет пределом нуль [3], а следовательно, никак не может быть ограничена снизу. В таком случае условие (4) лишается всякого смысла, ибо справа стоит конечная фиксированная величина – основной масштаб процесса (задачи)  $\tau_1$ .

Поэтому требование (4) может быть использовано лишь для конечной величины приращения  $\Delta\tau$ . А это, в свою очередь, требует удержания бесконечно большого числа членов в степенном разложении  $\Delta\tau$  в ряд Тейлора:

$$\Delta\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \left. \frac{d^n \tau}{dT^n} \right|_{T=T_1} \right) (T - T_1)^n \quad (6)$$

Покажем, что все отброшенные [1, 2] слагаемые имеют тот же порядок, что и сохраненный в (5) первый член (6). Выполняя дифференцирование (1), находим

$$\left. \frac{1}{\tau_1} \frac{d\tau}{dT} \right|_{T=T_1} = -\frac{E_a}{RT_1^2}, \quad \left. \frac{1}{\tau_1} \frac{d^2\tau}{dT^2} \right|_{T=T_1} = \left( -\frac{E_a}{RT_1^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{RT_1}{E_a} \right)$$

Последнее слагаемое в скобке исчезает в связи с модельным предположением (2). Аналогично продолжая дифференцирование, в общем случае будем иметь

$$\left. \frac{1}{\tau_1} \frac{d^n \tau}{dT^n} \right|_{T=T_1} = \left( -\frac{E_a}{RT_1^2} \right)^n$$

Подстановка этого в (6) приводит к степенному ряду

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \quad u = \frac{E_a}{RT_1} \left( 1 - \frac{T}{T_1} \right), \quad (7)$$

который строго суммируется, поскольку относится к представлению известной функции [3]

$$\exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \quad (8)$$

Таким образом, окончательно получаем для (7)

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_1} = e^u - 1$$

откуда по условию (4), т.е.  $(\Delta\tau/\tau_1) \geq 1$ , можно найти логарифмированием  $u \geq \ln 2 = 0.693$ , или

$$\frac{E_a}{RT_1} \left( 1 - \frac{T}{T_1} \right) \geq \ln 2, \quad (9)$$

Поскольку диапазон сходимости ряда (8) является неограниченным [3], в нем может использоваться любая (конечная по (9)) величина  $u$ . В качестве приращения температуры  $\Delta T = T - T_1$  можно принять, следуя [1, 2] его максимальное значение (3), отвечающее полной разгрузке возмущения давления. Тогда условие (9) приобретает смысл достаточного критерия неустойчивости детонационной волны

$$\frac{E_a}{RT_1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right) \geq \ln 2, \quad (10)$$

К его достоинствам следует прежде всего отнести то, что он выведен для возмущений конечной амплитуды, т.е. возмущений нелинейного типа.

С позиции теории малых (линеаризованных) возмущений, путем строгого математического подхода к решению задачи нами [4] был получен необходимый и достаточный критерий неустойчивости детонационной волны в рассматриваемой модели. В рамках зависимости (1) он представляется следующим образом:

$$(\gamma_1 - 1) \frac{E_a (\delta - 1) M_1^2}{RT_1 A} > 1, \quad A = (1 + M_1) \frac{\gamma_2 (\delta - 1) + 1}{\gamma_2 (\delta - 1) + 1 + \delta} \quad (11)$$

где  $\delta = \rho_1/\rho_2$ ,  $M$  – число Маха,  $\rho$  – плотность,  $\gamma$  – отношение теплоемкостей; индексы соответствуют номерам областей ударно-сжатого исходного газа (“1”) и продуктов детонации (“2”).

Сравнение этого критерия (11) с таковым (10) произведем на примере [1,2] реального случая детонации, распространяющейся со скоростью  $D = 1.7$  км/с ( $M_0 = 5$ ) в газе при  $T_0 = 290$  К,  $T_1 = 1650$ К,  $R = 1.987$  кал/(моль·К),  $E_a = 40000$  кал/моль считая  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1.4$ . В результате будем иметь  $\delta = 3$ ,  $M_1^2 = 0.17$ ;

$(E_a / RT_1) > B_0$ ;  $B_{(10)} = 3.85$ ;  $B_{(11)} = 5.73$  при  $(E_a / RT_1) = 12.2$ , что действительно согласуется с модельным требованием (2).

Как и следовало ожидать, диапазон неустойчивости относительно возмущений конечной амплитуды (10) оказывается шире, нежели для бесконечно малых (линейных) возмущений, поскольку первые могут обеспечивать более интенсивную положительную обратную связь в области химической реакции (задержки “1”)

В заключение следует заметить, что вскрытая выше некорректность математического характера при выводе критерия [1,2], а именно

$$\frac{E_a}{RT_1} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\gamma} \right] \geq 1$$

целиком повторена в [5].

### Литература:

1. Щелкин К.И. Два случая неустойчивого горения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1959 – Т. 36. № 2. – С. 600-606.
2. Щелкин К.И., Трошин Я.К. Газодинамика горения М.: Наука – 1963. – 255 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: ГИТТЛ. – 1953 – 608с.
4. Асланов С.К. Критерий неустойчивости детонации Чепмена – Жуге в газе. // Доклады АН СССР. – 1965 – Т. 163, №3. – С 667-670.
5. Щетинков Е.С. Физика горения газов. – М.: Наука. – 1965. – 739с.

*Асланов С.К.*

### До теорії нестійкості фронту газової детонації

#### АНОТАЦІЯ

*Розкривається принципова некоректність отримання широко відомого критерію нестійкості детонаційних хвиль. Відповідний математичний аналіз дозволяє отримати правильний результат.*

*Aslanov S.K.*

### About the instability theory of gaseous detonation front

#### SUMMARY

*The fundamental incorrectness of well-known detonation wave instability criterion derivation was shown. By the appropriate mathematical analysis this error was eliminated. As a result the correct criterion was obtained.*