УДК 533.6.011.7

Асланов С.К., Кононов А.А.

Одесский Национальный университет имени И.И. Мечникова

Формула для избыточного давления Δp на фронте цилиндрической ударной волны при $0 < R < \infty$.

Математически исследовано поведение цилиндрической взрывной волны, образованной локализованным источником, на всем участке ее распространения. Основным результатом работы является формула для избыточного давления на фронте ударной волны во всем диапазоне изменения радиуса волны. При выводе указанной зависимости, использовались известные асимптотические закономерности для ближней и дальней зоны цилиндрических взрывных волн, учитывающие наличие противодавления, а также решения аналогичной задачи для случая сферической симметрии. Полученные теоретические результаты количественно согласуются с известными экспериментальными измерениями.

Изучение газодинамических параметров распространяющихся взрывных ударных волн является важной практической задачей. Особый интерес представляет получение единой аналитической зависимости избыточного давления Δp на фронте ударной волны от расстояния r между фронтом и источником взрыва во всем диапазоне изменения r. Строгое решение этой задачи чисто аналитическими средствами даже для сравнительно простой модели мгновенного точечного взрыва (ТВ) в среде с противодавлением наталкивается на непреодолимые математические трудности. К настоящему времени известны приближенные асимптотические формулы для двух предельных случаев – $R << 1$ (Мельникова, 1953) [1] и $R >> 1$ (Шефтер, 1957) [2], где R – безразмерный радиус ударной волны. В промежуточной области $R \sim 1$ применяются либо полуэмпирические формулы (Садовский, 1952) [3], либо табличные данные, полученные в результате численного решения задачи на ЭВМ (Охоцимский и др., 1957; Архангельский).

Недавно новый подход к построению приближенных аналитических зависимостей $\Delta p(R)$ для всей области изменения R был предложен в [4]. В указанной статье реализован оригинальный способ отыскания функции $\Delta p(R)$, определенной во всем диапазоне $0 < R < \infty$, и имеющей в указанных выше двух предельных случаях заданный характер асимптотического поведения, соответствующий результатам работ [1,2].

Отметим, что в работе [4] детально был разобран только случай сферической симметрии задачи. Нами в данной работе, используя этот метод, удалось найти формулу для $\Delta p(R)$ при цилиндрической симметрии задачи. Также в работе приведено сравнение данных зависимостей с численными данными.

Зависимость перепада давлений на фронте ударной волны вблизи центра выражается (решение линеаризованной задачи о ТВ) в виде разложения [1]:

$$\Delta p = \frac{Q_1}{R^2} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}Q_2 + o(1), \quad R = \frac{r}{r_d}, \quad r_d = \left(\frac{E_0}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad Q_1 = \frac{8}{25(\gamma+1)\alpha}, \quad R \ll 1. \qquad (1)$$

где $Q_2 = 1.269$, $\alpha = 0.983$ при $\gamma = 1.4$; E_0 – энергия выделенная при взрыве, а p_0 – начальное давление газа.

Асимптотика поведения ударных волн в дальней зоне описывается известными законами затухания. Для избыточного давления на фронте ударной волны в случае цилиндрической симметрии имеем ($r \gg 1$) [2]:

$$\Delta p = \frac{p_1}{p_0} - 1 = \frac{B_1}{(r/r_*)^{3/4}} + \frac{B_2}{(r/r_*)^{5/4}} + o\left(\frac{1}{(r/r_*)^{5/4}}\right). \qquad (2)$$

Для определения неизвестных постоянных B_j и r_* требуется учет ближней зоны взрыва. Разложение, описывающее изменение Δp для всех $0 < R < \infty$ будем искать в виде:

$$\Delta p = \frac{A_1}{R^2(R/R_* + C)^{-5/4}} + \frac{A_2}{R(R/R_* + C)^{1/4}} + o\left(\frac{1}{(R/R_*)^{5/4}}\right) \qquad (3)$$

с неизвестными A_j, R_*. Постоянная $C > 1$ вводится для устранения особенности в нуле. Введение постоянной C не повлияет на характер асимптотики (2). Действительно:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{B_1 R^2 (R/R_* + C)^{-5/4}}{A_1 (R/R_*)^{3/4}} = \frac{B_1}{A_1} \quad \text{и} \quad \lim_{R\to\infty} \frac{B_2 R (R/R_* + C)^{1/4}}{A_2 (R/R_*)^{5/4}} = \frac{B_2}{A_2}.$$

Т.е. слагаемые в (1) и соответствующие слагаемые в (3) имеют одинаковый порядок при $R \to \infty$.

Переразложим данное выражение по степеням $R \ll 1$. Приравняем коэффициенты при степенях $R \ll 1$ полученного разложения коэффициентам при соответствующих степенях разложения (1). Таким образом, получим систему для определения неизвестных A_j.

$$\begin{cases} Q_1 = A_2 R_*^2 \Rightarrow A_2 = \dfrac{Q_1}{R_*^2}, \\[2ex] A_2 R_* + A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = -A_2 R_* \Rightarrow A_3 = -\dfrac{Q_1}{R_*}, \\[2ex] \dfrac{A_1}{R_*^2 C^{3/2}} \dfrac{5}{16} - \dfrac{1}{4} \dfrac{A_2}{C^{5/4} R_*} = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1} Q_2. \end{cases} \qquad (4)$$

Для того чтобы замкнуть задачу определения констант воспользуемся полученным в [5] уравнением для интеграла энтропийных потерь в ударной волне на всем промежутке ее распространения (в качестве закона сохранения энергии при ТВ).

$$\frac{2\pi}{\gamma-1}\int_0^\infty\left[\left(1+\Delta p\right)^{1/\gamma}\frac{2\gamma+\left(\gamma-1\right)\Delta p}{2\gamma+\left(\gamma+1\right)\Delta p}-1\right]RdR=\frac{1}{\gamma}. \tag{5}$$

Сходимость интеграла обеспечена асимптотиками (1) и (2) при $R<<1$ и $R>>1$, соответственно.

В результате для $\gamma=1.4$ удается однозначно найти

$$R_*=1.085 \text{ и } C=0.348. \tag{6}$$

Из (4) далее получаем:

$$A_1=0.791,\ A_2=-0.538. \tag{7}$$

Сравнение полученной зависимости для перепада давления на фронте ударной волны с численными данными [6] показывает достаточно хорошее совпадение. В ближней зоне при $R<0.2$ отклонение $\varepsilon\sim1\%$, в промежуточной зоне $0.3<R<1.5$ отклонение $\varepsilon\sim3\%-8\%$ максимум отклонения достигается при $R\sim0.7$, и в дальней зоне при $R>2$ отклонение $\varepsilon\sim1\%$.

Литература:

1. *Мельникова (Бурнова) Н.С.* Исследование задачи о точечном взрыве. Диссертация на соискание учёной степени кандидата наук, М. – 1953. – 173 с. (см. РЖ “Механика”, 1954, №3, реф. 2535).
2. *Шефтер Г.М.* Асимптотическое решение уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа с цилиндрической симметрией // Доклады Академии Наук СССР. – 1957. – Т. 116, №4. – С. 572-575.
3. *Садовский М. А.* Механическое действие воздушных ударных волн по данным экспериментальных исследований. // Физика взрыва – М.: АН СССР. – 1952. – №1
4. *Асланов С.К.* Об асимптотике взрывных ударных волн // Доповіді НАН України. – 2003. – №4. – С. 40-43.
5. *Асланов С.К., Голинский О.С.* Энергия асимптотически эквивалентного точечного взрыва для взрыва заряда конечного объема в совершенном газе // Прикладная математика и технической физики. – 1988. – №6. – С. 44 – 51.
6. *Кестенбойм Х. С., Росляков Г.С., Чудов Л.А.* Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. – М.: "Наука". – 1974. – 254 с.

Асланов С.К., Кононов О.О.

Формула для надлишкового тиску Δp на фронті циліндричної ударної хвилі при $0 < R < \infty$.

АНОТАЦІЯ

Математично досліджена поведінка циліндричної вибухової хвилі, утвореної локалізованим джерелом, на всій ділянці її поширення. Основним результатом роботи є формула для надлишкового тиску на фронті ударної хвилі у всьому діапазоні зміни радіуса хвилі. При висновку зазначеної залежності, використовувалися відомі асимптотичні закономірності для близької й далекої зони циліндричних вибухових хвиль протитиску, що враховують його наявність, а також розв'язок аналогічної задачі для випадку сферичної симетрії. Отримані теоретичні результати кількісно узгодяться з відомими експериментальними вимірами.

Aslanov S.K., Kononov A.A.

The formula for the excess pressure Δp in front of a cylindrical shock wave with $0 < R < \infty$

SUMMARY

Mathematically, studied the behavior of a cylindrical blast wave formed, sources in the entire area of its distribution. We derive a formula for the excess pressure at the front of shock wave across the range of the radius of the wave. With the withdrawal of that dependence have been used well-known asymptotic regularity for near and distant zones of the cylindrical blast wave, taking into account the existence of counter-pressure and solutions of similar problems for the case of spherical symmetry. The obtained theoretical results quantitatively consistent with the known experimental measurement.