

**Кононов А.А.**

*Одесский Национальный университет имени И.И. Мечникова*

### **Асимптотические законы затухания ударных волн с цилиндрической симметрией.**

*Рассматривается вопрос о затухании ударных волн с цилиндрической симметрией. В частности, используя метод, предложенный в работах Седова и Якимова, найдены новые члены известных асимптотических разложений и уточнены законы изменения профиля ударной волны.*

#### **Введение.**

Вопрос затухания ударных волн имеет довольно большую историю. Законы вырождения плоских ударных волн были изучены еще в 1913 г. Крюссаром [1] в предположении, что возмущенное состояние газа за фронтом представляет собой риманову бегущую волну, содержащую точку, в которой скорость газа равна нулю. Аналогичное исследование другим способом было выполнено позднее Шмушкевичем [2].

Характер затухания сферических и цилиндрических ударных волн установлен впервые Л. Д. Ландау в 1945 г. [3] в предположении, что возмущенное состояние газа за фронтом ослабляется, и что это движение стремится к бегущей волне, в которой возмущения в фиксированный момент времени расположены на интервале конечной длины и которая отличается от акустической только уточненным значением скорости звука. За рубежом аналогичные результаты были опубликованы позднее в [4]. Характер ослабления ударных волн в воде изучен Христиановичем [5].

Более последовательный математически метод рассмотрения этой задачи был предложен Л. И. Седовым [6]. Им получены асимптотические формулы изменения газодинамических параметров на фронте ударной волны для всех трех случаев симметрии задачи. В представляющем для нас основной интерес цилиндрическом случае, найдена формула:

$$\Delta p = \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{A}{r^{3/4}} + \dots$$

Позже методика Седова была использована Якимовым [7] для получения разложений более высокого порядка точности при описании эволюции сферически-симметричных ударных волн. В 1957 г. Шефтер [8], используя методологию Якимова, получил для цилиндрического случая разложения порядка малости выше первого. Результаты работы [8] могут быть описаны следующими соотношениями.

$$\begin{cases} p = 1 + \frac{C_0}{r^{3/4}} - \frac{C_0}{2} \frac{\chi_1}{1+1/\gamma} \frac{1}{r^{5/4}} + \dots \\ \rho = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{C_0}{r^{3/4}} - \frac{C_0}{2} \frac{1}{\gamma} \frac{\chi_1}{1+1/\gamma} \frac{1}{r^{5/4}} + \dots \\ u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{C_0}{r^{3/4}} - \frac{C_0}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\chi_1}{1+1/\gamma} \frac{1}{r^{5/4}} + \dots \end{cases}$$

где постоянная  $C_0$  определяется из начальных условий, а  $\chi_1$  известная нам величина.

Нами методом Якимова были получены новые члены разложения, следующие за слагаемыми, найденными Шефтером.

В первой части статьи мы, следуя методике Якимова, строим три асимптотических решения системы нелинейных уравнений, описывающих неустановившиеся движения идеального газа с цилиндрической симметрией. Все решения строятся с помощью функциональных рядов.

Два первых решения содержат по одной произвольной функции и по счетному набору произвольных постоянных. Для этих решений вычислены члены до пятого порядка малости включительно, а задача отыскания следующих членов сведена к решению линейной алгебраической системы с постоянными коэффициентами.

Третье решение содержит две произвольные функции; для этого решения вычислены члены до пятого порядка малости включительно.

Во второй части полученные решения применены к задаче об асимптотическом поведении ударных волн. В частности исследуется скорость убывания интенсивности ударных волн и законы изменения профиля ударной волны.

### 1. Поиск общего решения.

Рассмотрим уравнения одномерного неустановившегося движения идеального газа

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho u}{r} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} S + u \frac{\partial}{\partial r} S = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $\nu = 1, 2, 3$  соответственно для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии, а  $u, \rho, p, t$  и  $r$  — соответственно обезразмеренные скорость, плотность, давление, время и радиус,  $S$  — энтропия.

Для совершенного газа:  $S = \frac{p}{\rho^\nu}$ .

Тогда последнее уравнение, выражающее сохранение энтропии  $S$  в частице, можно переписать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\gamma p}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = 0.$$

Известно [3], что уравнения (1) имеют три семейства характеристических направлений

$$dr = (a + u)dt, \quad dr = (-a + u)dt, \quad dr = udt.$$

где  $a$  – скорость звука, соответствующие прямой акустической, обратной акустической и энтропийной волнам.

Построим решение для прямой волны.

Введем характеристическую переменную  $\xi_1$

$$\mu_{10} d\xi_1 = dr - (a + u)dt, \quad (2)$$

где  $\mu_{10}$  – интегрирующий множитель, так как  $dr - (a + u)dt$  не является полным дифференциалом. Сделаем замену переменных  $r, t$  в системе (1) переменными  $r, \xi_1$ , где  $\xi_1$  введено при помощи равенства (2).

Для прямой волны имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho a \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{(\nu - 1) \gamma p u}{(u + a) r} = 0 \\ -a \rho \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p}{\partial \xi_1} = -\rho u \mu_{10} \frac{\partial u}{\partial r} - \mu_{10} \frac{\partial p}{\partial r} \\ -\frac{\partial p}{\partial \xi_1} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1} = -\frac{\mu_{10} u}{a} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu_{10} a u \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \mu_{10} = (a + u) \left( \mu_0(\xi_1) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{r_0}^r \left( \frac{1}{a + u} \right) dr \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

В дальнейшем нас будет интересовать поведение решения при достаточно больших  $r$  и при  $\nu = 2$  (цилиндрическая волна). Считая в невозмущенном состоянии  $p_0 = 1$  и  $\rho_0 = 1$ , будем искать решение в виде рядов

$$p_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} F_{ki}(\xi_1) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}; \quad u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{ki}(\xi_1) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}; \quad \rho_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \Psi_{ki}(\xi_1) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}} \quad (4)$$

Подставляя ряды (4) в систему (3) и группируя слагаемые по степеням  $r$  и  $\ln r$ , найдем соотношения для функций  $F_{ki}, \Phi_{ki}, \Psi_{ki}$ . При выведении зависимостей будем отбрасывать слагаемые порядка  $o\left(\frac{\ln r}{r^{3/2}}\right)$ . Это обусловлено тем, что

при учете слагаемых более высоких порядков малости в решении пришлось бы учитывать энтропийную волну [3].

Обозначим через  $a_0 = \sqrt{\gamma}$  скорость звука в невозмущенном газе.

Из последнего уравнения в (3) имеем

$$\mu_{10} \sim \left( F'_{10} - \Psi'_{10} + 2 \frac{\Phi'_{10}}{a_0} \right) \sqrt{r} + \left( \frac{F'_{21} - \Psi'_{21}}{4} + \frac{\Phi'_{21}}{2a_0} \right) \ln^2 r + \left( \frac{F'_{20} - \Psi'_{20}}{2} + \frac{\Phi'_{20}}{a_0} \right) \ln r + \mu_{100}(\xi_1)$$

где  $\mu_{100}(\xi_1)$  - произвольная функция, положим  $\mu_{100}(\xi_1) \equiv 1$ .

Из системы (3), получили 14 уравнений и 15 неизвестных.

Следовательно, одну из функций можно, считать произвольной, например,  $F_{10}(\xi_1)$ . Все остальные функции определяются через  $F_{10}(\xi_1)$  последовательным разрешением уравнений для производных и последующим интегрированием. При этом появятся произвольные константы, связанные только первым уравнением из (3).

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= \frac{1}{a_0} F_{10}, \quad \Psi_{10} = \frac{1}{2} F_{10} + C_{\Psi_{10}}, \quad F_{21} = 0, \quad \Psi_{21} = C_{\Psi_{21}}, \quad \Phi_{21} = C_{\Phi_{21}}; \\ F_{20} &= \frac{a_0^2 - 3}{4a_0^2} F_{10}^2 + \frac{1}{4} C_{\Psi_{10}} F_{10} + a_0 C_{\Phi_{21}}, \quad \Psi_{20} = -\frac{a_0^2 + 1}{4a_0^4} F_{10}^2 + \frac{5}{4a_0^2} C_{\Psi_{10}} F_{10} + C_{\Psi_{20}}; \\ \Phi_{20} &= -\frac{a_0^2 + 5}{4a_0^3} F_{10}^2 - \frac{1}{4a_0} C_{\Psi_{10}} F_{10} + C_{\Phi_{20}}, \quad F_{32} = C_{F_{32}}, \quad \Phi_{32} = -\frac{3}{a_0} C_{F_{32}}, \quad \Psi_{32} = C_{\Psi_{32}}; \\ F_{31} &= \frac{a_0^4 + 11}{96a_0^4} F_{10}^3 + \frac{a_0^2 - 7}{128a_0^2} C_{\Psi_{10}} F_{10}^2 + \left( \frac{C_{\Psi_{21}}}{8} - \frac{C_{\Phi_{21}}}{a_0} \right) F_{10} + C_{F_{31}}; \\ \Phi_{31} &= -\frac{a_0^4 + 11}{32a_0^5} F_{10}^3 - \frac{3a_0^2 - 21}{128a_0^3} C_{\Psi_{10}} F_{10}^2 - \left( \frac{3}{a_0^2} C_{\Phi_{21}} + \frac{3}{8a_0} C_{\Psi_{21}} \right) F_{10} + \frac{8C_{F_{32}} - 3C_{F_{31}}}{a_0^3}; \\ \Psi_{31} &= \frac{a_0^4 + 11}{96a_0^6} F_{10}^3 + \frac{a_0^2 - 7}{128a_0^2} C_{\Psi_{10}} F_{10}^2 + \left( \frac{9C_{\Psi_{21}}}{8a_0^2} - \frac{C_{\Phi_{21}}}{a_0^3} \right) F_{10} + C_{\Psi_{31}}; \\ \mu_{10} &= \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) F'_{10}(\xi_1) \sqrt{r} + \left( \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} F'_{10} F_{10} + \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{4a_0^2} \right) C_{\Psi_{10}} F'_{10} \right) \ln r + 1 + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим решение для обратной волны. Действуем аналогично построению для прямой волны. Вводим характеристическую переменную  $\xi_2$ , согласно соотношению

$$\mu_{20} d\xi_2 = dr - (-a + u) dt$$

где  $\mu_{20}$  - интегрирующий множитель, так как  $dr - (-a + u) dt$  не является полным дифференциалом.

И ищем решение в виде

$$p_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} f_{ki}(\xi_1) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}; \quad u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_{ki}(\xi_1) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}; \quad \rho_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \psi_{ki}(\xi_1) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}.$$

В итоге для обратной волны получим

$$\phi_{10} = -\frac{1}{a_0} f_{10}, \quad \psi_{10} = \frac{1}{2} f_{10} + C_{\psi_{10}}, \quad f_{21} = 0, \quad \phi_{21} = C_{\phi_{21}}, \quad \psi_{21} = C_{\psi_{21}};$$

$$\begin{aligned}
f_{20} &= \frac{a_0^2 - 3}{4a_0^2} f_{10}^2 + \frac{1}{4} C_{\psi_{10}} f_{10} + a_0 C_{\phi_{21}} & \phi_{20} &= \frac{a_0^2 + 5}{4a_0^3} f_{10}^2 + \frac{1}{4a_0} C_{\psi_{10}} f_{10} + C_{\phi_{20}}; \\
\psi_{20} &= -\frac{a_0^2 + 1}{4a_0^4} f_{10}^2 + \frac{5}{4a_0^2} C_{\psi_{10}} f_{10} + C_{\psi_{20}} & f_{32} &= C_{f_{32}} & \phi_{32} &= \frac{3}{a_0} C_{f_{32}} & \psi_{32} &= C_{\psi_{32}}; \\
f_{31} &= \frac{a_0^4 + 11}{96a_0^4} f_{10}^3 + \frac{a_0^2 - 7}{128a_0^2} C_{\psi_{10}} f_{10}^2 + \left( \frac{C_{\phi_{21}}}{a_0} + \frac{C_{\psi_{21}}}{8} \right) F_{10} + C_{f_{31}}; \\
\phi_{31} &= \frac{a_0^4 + 11}{32a_0^5} f_{10}^3 + \frac{3a_0^2 - 21}{128a_0^3} C_{\psi_{10}} f_{10}^2 + \left( -\frac{C_{\phi_{21}}}{a_0} + \frac{3}{8a_0} C_{\psi_{21}} \right) F_{10} + \frac{8C_{f_{32}} + 3C_{f_{31}}}{a_0}; \\
\psi_{31} &= \frac{a_0^4 + 11}{96a_0^6} f_{10}^3 + \frac{a_0^2 - 7}{128a_0^4} C_{\psi_{10}} f_{10}^2 + \left( \frac{1}{a_0^3} C_{\phi_{21}} + \frac{9}{8a_0^2} C_{\psi_{21}} \right) f_{10} + C_{\psi_{31}}; \\
\mu_{20} &= \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) f'_{10}(\xi_2) \sqrt{r} + \left( \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} f'_{10} f_{10} + \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{4a_0^2} \right) C_{\psi_{10}} f'_{10} \right) \ln r + 1 + \dots
\end{aligned}$$

Рассмотрим волну взаимодействия.

Решения, найденные выше, описывают волны одного направления и, как следствие, содержат только по одной произвольной функции  $F_{10}(\xi_1)$  и  $f_{10}(\xi_2)$ .

Построим теперь решение содержащие явно две произвольные функции.

Решение будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned}
p &= 1 + \Delta p_1 + \Delta p_{12} + \Delta p_2; \\
\rho &= 1 + \Delta \rho_1 + \Delta \rho_{12} + \Delta \rho_2; \\
u &= u_1 + u_{12} + u_2,
\end{aligned}$$

где  $\Delta p_1 = p_1 - 1$ ,  $\Delta \rho_1 = \rho_1 - 1$ ,  $u_1$  - волна идущая от центра;

$\Delta p_2 = p_2 - 1$ ,  $\Delta \rho_2 = \rho_2 - 1$ ,  $u_2$  - волна идущая к центру;

$\Delta p_{12} = p_{12} - 1$ ,  $\Delta \rho_{12} = \rho_{12} - 1$ ,  $u_{12}$  - обращаются в нуль, когда величины  $\Delta p_1$ ,  $\Delta \rho_1$ ,  $u_1$  или  $\Delta p_2$ ,  $\Delta \rho_2$ ,  $u_2$  равны нулю. Течение, описываемое последними соотношениями, назовем волной взаимодействия.

Величины  $p_{12}$ ,  $\rho_{12}$ ,  $u_{12}$  будем искать в виде рядов

$$\begin{aligned}
p_{12} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ki}(\xi_1, \xi_2) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}; \\
u_{12} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \omega_{ki}(\xi_1, \xi_2) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}; \\
\rho_{12} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{ki}(\xi_1, \xi_2) \frac{\ln^i r}{r^{k/2}}
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  по-прежнему удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} \mu_1 d\xi_1 = dr - (a + u)dt \\ \mu_2 d\xi_2 = dr - (-a + u)dt \end{cases} \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\eta_1 = \frac{\mu_1}{a+u} \quad \text{и} \quad \eta_2 = \frac{\mu_2}{-a+u}.$$

Из (6) получим

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(\xi_1, r, \xi_2(\xi_1, r)) = \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f}{\partial r}(\xi_1, r, \xi_2(\xi_1, r)) = \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial r} + \frac{2a}{\mu_2(a+u)} \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(\xi_1(\xi_2, r), r, \xi_2) = \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f}{\partial r}(\xi_1(\xi_2, r), r, \xi_2) = \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial r} - \frac{2a}{\mu_1(-a+u)} \frac{\partial f(\xi_1, r, \xi_2)}{\partial \xi_1} \end{cases} \quad (7)$$

Из (6) получим систему для определения  $\eta_1$  и  $\eta_2$ :

$$\begin{cases} \frac{2a}{(a+u)(-a+u)} \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\eta_1) = -\eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{a+u} \right) - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{a+u} \right) - \eta_2 \frac{\partial}{\partial r}(\eta_1) \\ \frac{2a}{(a+u)(-a+u)} \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\eta_2) = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{-a+u} \right) + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{-a+u} \right) + \eta_1 \frac{\partial}{\partial r}(\eta_2) \end{cases}$$

Будем искать  $\eta_1$  и  $\eta_2$  при помощи рядов, аналогичных рядам для  $\mu_{10}$  и  $\mu_{20}$ . Причем,  $\eta_{1ki}$  будут определяться с точностью до произвольных функций от  $\xi_1$ , а  $\eta_{2ki}$  с точностью до произвольных функций от  $\xi_2$ . Выбираем эти функции так, чтобы  $\mu_1 = \mu_{10} + \mu_{11}$  и  $\mu_2 = \mu_{20} + \mu_{22}$ , где  $\mu_{11} = 0$  при отсутствии волны идущей к центру, а  $\mu_{22} = 0$  при отсутствии волны идущей от центра. В итоге получим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) F'_{10}(\xi_1) \sqrt{r} + \left( \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} F'_{10} F_{10} + \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{4a_0^2} \right) C_{\psi_{10}} F'_{10} \right) \ln r + 1 + \dots \\ \mu_2 &= \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) f'_{10}(\xi_2) \sqrt{r} + \left( \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} f'_{10} f_{10} + \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{4a_0^2} \right) C_{\psi_{10}} f'_{10} \right) \ln r + 1 + \dots \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в главных членах совпадают с  $\mu_{10}$  и  $\mu_{20}$ .

Рассмотрим теперь систему уравнений (3). Раскроем производные по формулам (7).

$$\begin{cases} \rho a \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{(v-1) \gamma p u}{(u+a)r} + \frac{2a}{(a+u)\mu_2} \left[ \rho a \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial p}{\partial \xi_2} \right] = 0 \\ -a\rho \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p}{\partial \xi_1} + \rho u \mu_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \mu_1 \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \left[ a\rho \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial p}{\partial \xi_2} \right] \\ -\frac{\partial p}{\partial \xi_1} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1} + \frac{\mu_1 u}{a} \frac{\partial p}{\partial r} - \mu_1 a u \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi_2} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi_2} \right] \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя (5) в (8) и группируя слагаемые, получим систему уравнений в частных производных, решая которую будем иметь:

$$\alpha_{10} = \omega_{10} = \beta_{10} = \alpha_{21} = \omega_{21} = \beta_{21} = \omega_{20} = \alpha_{32} = \omega_{32} = \beta_{32} = 0, C_{\Psi_{21}} = C_{\psi_{21}} = C_{\Psi_{10}} = C_{\psi_{10}} = 0;$$

$$\beta_{20} = -\frac{a_0^2 - 3}{2a_0^4} F_{10} f_{10}, \quad \alpha_{31} = -\frac{a_0^4 + 11}{16a_0^4} F_{10} f_{10}^2, \quad \omega_{31} = \frac{a_0^4 + 11}{16a_0^5} F_{10} f_{10}^2,$$

$$\beta_{31} = -\frac{a_0^4 + 11}{16a_0^6} F_{10} f_{10}^2;$$

Таким образом, асимптотическое решение системы нелинейных уравнений описывающих неустановившееся движения идеального газа с цилиндрической симметрией в пределах первых пяти членов будет иметь вид

$$\begin{aligned} p &= 1 + \frac{F_{10}(\xi_1) + f_{10}(\xi_2)}{\sqrt{r}} + \frac{F_{20}(\xi_1) + \alpha_{20}(\xi_1, \xi_2) + f_{20}(\xi_2)}{r} + (C_{F_{32}} + C_{f_{32}}) \frac{\ln^2 r}{r^{3/2}} + \\ &+ (F_{31}(\xi_1) + \alpha_{31}(\xi_1, \xi_2) + f_{31}(\xi_2)) \frac{\ln r}{r^{3/2}} + \dots \\ \rho &= 1 + \frac{1}{a_0^2} \frac{F_{10}(\xi_1) + f_{10}(\xi_2)}{\sqrt{r}} + \frac{\Psi_{20}(\xi_1) + \beta_{20}(\xi_1, \xi_2) + \psi_{20}(\xi_2)}{r} + (C_{\Psi_{32}} + C_{\psi_{32}}) \frac{\ln^2 r}{r^{3/2}} + \\ &+ (\Psi_{31}(\xi_1) + \beta_{31}(\xi_1, \xi_2) + \psi_{31}(\xi_2)) \frac{\ln r}{r^{3/2}} + \dots \\ u &= \frac{1}{a_0} \frac{F_{10}(\xi_1) - f_{10}(\xi_2)}{\sqrt{r}} + (C_{\Phi_{21}} + C_{\phi_{21}}) \frac{\ln r}{r} + \frac{\Phi_{20}(\xi_1) + \phi_{20}(\xi_2)}{r} - \\ &- \frac{3}{a_0} (C_{F_{32}} - C_{f_{32}}) \frac{\ln^2 r}{r^{3/2}} + (\Phi_{31}(\xi_1) + \omega_{31}(\xi_1, \xi_2) + \phi_{31}(\xi_2)) \frac{\ln r}{r^{3/2}} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

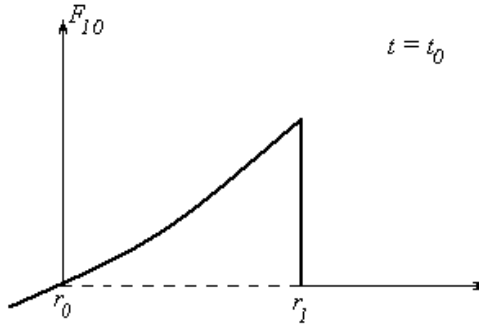
где выражения для  $F_{20}, f_{20}, \alpha_{20}, \dots$  и т.д. написаны выше. Это решение содержит в явном виде две произвольные функции и счетный набор произвольных постоянных.

## 2. Скорость убывания интенсивности ударных волн.

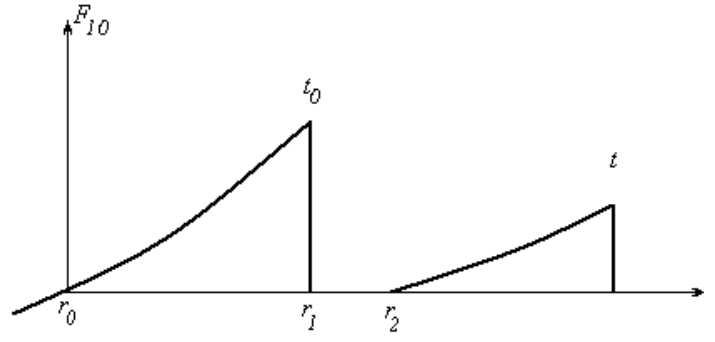
Применим полученное решение к ударным волнам. Введем в рассмотрение, например, скорость движения переднего фронта ударной волны как неизвестную пока функцию радиуса  $D(r)$ . Тогда вместе с тремя произвольными функциями (третья представляет собой счетный набор констант), имеющимися в решении, будем иметь четыре произвольные функции и для них три произвольных соотношения на ударной волне. Задаваясь видом одной из них, например,  $F_{10}(\xi_1)$  - профилем волны идущей от центра, при помощи трех соотношений на ударной волне, определим вид остальных трех функций.

Будем предполагать, что скачок движется по невозмущенной среде, где  $p_0 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$  и  $u_0 = 0$ .

Тогда условия Ренкина-Гюгонио будут иметь вид:



**Рис. 1** Профиль волны в момент времени  $t_0$ .



**Рис. 2** Изменение профиля волны со временем.

$$u^2 = \frac{1}{\rho} \Delta p \Delta \rho. \quad (10)$$

$$D^2 = \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho}. \quad (11)$$

$$\Delta p \Delta \rho + \frac{2}{a_0^2 - 1} (a_0^2 \Delta \rho - \Delta p) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим равенство (12). Подставляя в него выражения (9) и группируя слагаемые при степенях  $r$  и  $\ln r$ , получим условия для нахождения неизвестных постоянных в выражении (9).

Получим

$$C_{\Psi_{20}} = C_{\psi_{20}} = C_{\Phi_{21}} = C_{\phi_{21}} = C_{F_{32}} = C_{f_{32}} = C_{F_{31}} = C_{f_{31}} = C_{\Psi_{32}} = C_{\psi_{32}} = C_{\Psi_{31}} = C_{\psi_{31}} = 0.$$

Из (10) получим

$$f_{10}(\xi_2) = -\frac{a_0^2 + 1}{8a_0^2} F_{10}^2(\xi_1) \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{a_0^4 + 11}{96a_0^4} F_{10}^3(\xi_1) \frac{\ln r}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Из соотношения (11) получим:

$$D = a_0 \left( 1 + \frac{a_0^2 + 1}{4a_0^2} (F_{10}(\xi_1) + f_{10}(\xi_2)) \frac{1}{\sqrt{r}} \right) + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Исследование асимптотического поведения ударной волны будем производить при помощи равенства

$$\mu_1 d\xi_1 = dr - (a + u) dt. \quad (13)$$

На скачке справедливо соотношение  $\frac{dr}{dt} = D(r)$ , поэтому равенство (13)

можно переписать так:

$$\mu_1 d\xi_1 = \left[ 1 - \frac{a + u}{D} \right] dr. \quad (14)$$

Подставим в (14) вместо  $\mu_1$ ,  $-(a + u)$  и  $D^{-1}$  их выражения через ряды.

Из (13) получим дифференциальное уравнение верное на скачке



$$\frac{dF_{10}}{dr} \left[ \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \sqrt{r} + \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} F_{10} \ln r + \frac{\partial \xi_1}{\partial F_{10}} + \dots \right] = -\frac{a_0^2 + 1}{4a_0^2} F_{10} \frac{1}{\sqrt{r}} + \dots \quad (15)$$

Равенство (15) было бы уравнением для определения  $F_{10}(r)$  на скачке, если бы была известна производная  $\frac{\partial \xi_1}{\partial F_{10}}$ .

Эту производную можно вычислить, если считать заданным, например, профиль волны в фиксированный момент времени  $t_0$ . Это требование играет роль начальных условий задачи. Покажем это.

Профиль волны можно считать заданным, если известна функция  $F_{10}(r, t_0)$  (рис. 1).

Предположим, что

$$F_{10}(r_0, t_0) = 0, \quad \left[ \frac{\partial F_{10}(r, t)}{\partial r} \right]_{r=r_0, t=t_0} \neq 0.$$

И что  $F_{10}(r, t_0)$  разлагается в ряд Тейлора

$$F_{10}(r, t_0) = \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_0, t_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \Big|_{r_0, t_0} (r - r_0)^2 + \dots; \quad (16)$$

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{t_0} = \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_0, t_0} + \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \Big|_{r_0, t_0} (r - r_0) + \dots; \quad (17)$$

Отсюда получим выражение  $r(F_{10})$

$$r - r_0 = \frac{1}{(\partial F_{10} / \partial r)_{r_0, t_0}} F_{10} - \frac{1}{2} \frac{(\partial^2 F_{10} / \partial r^2)_{r_0, t_0}}{(\partial F_{10} / \partial r)_{r_0, t_0}^3} F_{10}^2 + \dots \quad (18)$$

Также

$$\sqrt{r} = \sqrt{r_0} + \frac{1}{2\sqrt{r_0}} (r - r_0) - \frac{1}{8r_0^{3/2}} (r - r_0)^2 + \dots \quad (19)$$

$$\ln r = \ln r_0 + \frac{(r - r_0)}{r_0} - \frac{(r - r_0)^2}{2r_0^2} + \dots \quad (20)$$

В фиксированный момент времени  $t_0$   $dt = 0$  и (13) примет вид

$$\mu_1 d\xi_1 = dr.$$

или

$$\left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \sqrt{r} + \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} \frac{\partial F_{10}}{\partial r} F_{10}(r, t_0) \ln r + \frac{\partial \xi_1}{\partial r} + \dots = 1. \quad (21)$$

в момент времени  $t_0$ .

Из (21) получим

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial r} \Big|_{r, t_0} = 1 - \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r, t_0} \sqrt{r} - \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r, t_0} F_{10}(r, t_0) \ln r + \dots \quad (22)$$

Подставляя в (22) выражения (16-17) и (19-20) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial r} \Big|_{r,t_0} &= \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_0,t_0} \sqrt{r_0} \right] - \\ &- \left[ \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \left( \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_0,t_0} \frac{1}{2\sqrt{r_0}} + \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \Big|_{r_0,t_0} \sqrt{r_0} \right) + \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} \left[ \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r,t_0} \right]^2 \ln r_0 \right] (r - r_0) + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Интегрируя (23) получим

$$\begin{aligned} \xi_1(r, t_0) &= \xi_0 + \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_0,t_0} \sqrt{r_0} \right] (r - r_0) - \\ &- \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \left( \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_0,t_0} \frac{1}{2\sqrt{r_0}} + \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \Big|_{r_0,t_0} \sqrt{r_0} \right) + \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} \left[ \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r,t_0} \right]^2 \ln r_0 \right] (r - r_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив в (24) вместо разности  $(r - r_0)$  выражение (18), получим

$$\xi_1(F_{10}) = \xi_0 + \chi_1 F_{10} + \frac{1}{2} \chi_2 F_{10}^2 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{(\partial F_{10} / \partial r)_{r_0,t_0}} - \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \sqrt{r_0}; \\ \chi_2 &= - \frac{(\partial^2 F_{10} / \partial r^2)_{r_0,t_0}}{(\partial F_{10} / \partial r)_{r_0,t_0}^3} - \frac{\left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right)}{2\sqrt{r_0}} \frac{1}{(\partial F_{10} / \partial r)_{r_0,t_0}} - \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} \ln r_0. \end{aligned}$$

Зависимость  $\xi_1(F_{10})$  не меняется с течением времени. Значит, в любой момент времени и для любого радиуса

$$\frac{d\xi_1}{dF_{10}} = \chi_1 + \chi_2 F_{10} + \dots \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в (15), получим уравнение для определения  $F_{10}(r)$  на скачке

$$\frac{dF_{10}}{dr} \left[ \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \sqrt{r} + \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} F_{10} \ln r + \chi_1 + \chi_2 F_{10} + \dots \right] = - \frac{a_0^2 + 1}{4a_0^2} F_{10} \frac{1}{\sqrt{r}} + \dots \quad (26)$$

Решение данного уравнения можно искать в виде

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ki} r^{-k/4} \ln^i r, \quad i < \frac{k}{2}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26) и группируя слагаемые, получим  $F_{10}(r)$  на скачке

$$F_{10}(r) = \frac{C_0}{r^{1/4}} - \frac{C_0}{2} \frac{\chi_1}{1 + 1/a_0^2} \frac{1}{r^{3/4}} - \frac{C_0^2}{12} \frac{a_0^4 + 11}{a_0^4} \frac{1}{1 + 1/a_0^2} \frac{\ln r}{r} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \quad (28)$$

где  $C_0$  - произвольная постоянная, а  $\varepsilon_1 \sim \frac{1}{r}$  и  $\varepsilon_2 \sim \frac{1}{r^{5/4}}$ .

Теперь, подставляя (28) в (9), получим асимптотические законы затухания ударных волн с цилиндрической симметрией, движущихся по невозмущенному идеальному газу.

$$\begin{cases} p = 1 + \frac{C_0}{r^{3/4}} - \frac{C_0}{2} \frac{\chi_1}{1+1/a_0^2} \frac{1}{r^{5/4}} - \frac{C_0^2 a_0^4 + 11}{12} \frac{1}{a_0^4} \frac{1}{1+1/a_0^2} \frac{\ln r}{r^{3/2}} + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \dots \\ \rho = 1 + \frac{1}{a_0^2} \frac{C_0}{r^{3/4}} - \frac{C_0}{2} \frac{1}{a_0^2} \frac{\chi_1}{1+1/a_0^2} \frac{1}{r^{5/4}} - \frac{C_0^2 a_0^4 + 11}{12} \frac{1}{a_0^6} \frac{1}{1+1/a_0^2} \frac{\ln r}{r^{3/2}} + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \dots \\ u = \frac{1}{a_0} \frac{C_0}{r^{3/4}} - \frac{C_0}{2} \frac{1}{a_0} \frac{\chi_1}{1+1/a_0^2} \frac{1}{r^{5/4}} - \frac{C_0^2 a_0^4 + 11}{12} \frac{1}{a_0^5} \frac{1}{1+1/a_0^2} \frac{\ln r}{r^{3/2}} + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \dots \end{cases}$$

где невычисленные порядки  $\varepsilon_3 \sim \frac{1}{r^{3/2}}$ ,  $\varepsilon_4 \sim \frac{1}{r^{7/4}}$ , а постоянная  $C_0$  определяется из начальных условий.

Отметим, что первые члены разложения сохраняют свой вид, а следующий за ними член пропорционален  $\frac{\ln r}{r^{3/2}}$ , а не  $\frac{1}{r^{3/2}}$  как предполагалось ранее [8].

### 3. Законы изменения профиля ударной волны.

Теперь рассмотрим задачу о профиле волны в фиксированный момент времени. Подставив (25) в (21) получим следующее уравнение для определения формы волны в любой момент времени:

$$\frac{dF_{10}}{dr} \left[ \left( 1 + \frac{1}{a_0^2} \right) \sqrt{r} + \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} F_{10} \ln r + \chi_1 + \chi_2 F_{10} + \dots \right] = 1. \quad (29)$$

Предположим (см. рис 2), что в произвольный момент времени  $t_2$  существует точка, в которой функция  $F_{10}(r_2, t_2) = 0$  и в окрестности  $r = r_2$  разлагается по степеням  $(r - r_2)$  в ряд

$$F_{10}(r, t_2) = \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_2, t_2} (r - r_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \Big|_{r_2, t_2} (r - r_2)^2 + \dots \quad (30)$$

В самой точке  $r_2$  имеет место  $p = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $u = 0$ .

Подставляя (29) в (30), получим

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial r} \Big|_{r_2, t_2} = \frac{1}{\left( 1 + 1/a_0^2 \right) \sqrt{r_2} + \chi_1}; \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \Big|_{r_2, t_2} = -\frac{1}{2} \frac{\left( 1 + 1/a_0^2 \right)^2 + 2\chi_2 + \left( 1 + 1/a_0^2 \right) \chi_1 \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{a_0^4 + 11}{4a_0^4} \ln r_2}{\left[ \left( 1 + 1/a_0^2 \right) \sqrt{r_2} + \chi_1 \right]^3}. \quad (32)$$

Подставим (31) и (32) в (9), предварительно продифференцированное по  $r$ . Получим

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} \frac{1}{(1+1/a_0^2)\sqrt{r_2} + \chi_1} + O\left(\frac{1}{r_2^2}\right); \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{1}{\sqrt{r_2}} \frac{1}{(1+1/a_0^2)\sqrt{r_2} + \chi_1} + O\left(\frac{1}{r_2^2}\right); \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{r_2}} \frac{1}{(1+1/a_0^2)\sqrt{r_2} + \chi_1} + O\left(\frac{1}{r_2^2}\right); \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} = \left. \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} \frac{1}{\sqrt{r_2}} - \left. \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} \frac{1}{r_2^{3/2}} + \frac{a_0^2 - 7}{4a_0^2} \left[ \left. \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} \right]^2 \frac{1}{r_2} + o\left(\frac{1}{r_2^2}\right); \quad (36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} = \frac{1}{a_0^2} \left[ \left. \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} \frac{1}{\sqrt{r_2}} - \left. \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} \frac{1}{r_2^{3/2}} \right] - \frac{3a_0^2 + 3}{4a_0^4} \left[ \left. \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} \right]^2 \frac{1}{r_2} + o\left(\frac{1}{r_2^2}\right); \quad (37)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} = \frac{1}{a_0} \left[ \left. \frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} \frac{1}{\sqrt{r_2}} - \left. \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} \frac{1}{r_2^{3/2}} \right] - \frac{3a_0^2 + 11}{4a_0^3} \left[ \left. \frac{\partial F_{10}}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} \right]^2 \frac{1}{r_2} + o\left(\frac{1}{r_2^2}\right); \quad (38)$$

Подставляя (33-38) в формулы

$$\begin{cases} p(r, t_2) = 1 + \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} (r - r_2) + \left. \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} (r - r_2)^2 + \dots \\ \rho(r, t_2) = 1 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} (r - r_2) + \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} (r - r_2)^2 + \dots \\ u(r, t_2) = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r_2, t_2} (r - r_2) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r_2, t_2} (r - r_2)^2 + \dots \end{cases}$$

получим асимптотические формулы профиля ударной волны в некоторый фиксированный момент времени  $t_2$ .

Формулы (33-38) уточняют результаты работы [8].

### Заключение.

В данной работе были уточнены законы затухания и изменения профиля ударных волн с цилиндрической симметрией. Были найдены новые члены для асимптотических разложений для параметров на фронте ударной волны. Стоит отметить, что исследование более высокой точности требует учета энтропийных волн, что порождает большие математические трудности.

Благодарю научного руководителя проф. Асланова С.К. за внимание к работе, а также проф. Калинин В.В. за обсуждение и сделанные замечания.

### Литература:

1. *Crussard L.* Compt. Rend. 1913, 156, 447, 661.
2. *Шмушкевич И.М.* Затухание плоских ударных волн малой амплитуды. // Журнал технической физики. – 1938. – Т.8, №. 24. – С.2168-2174.

3. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на значительных расстояниях от места их возникновения. // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т.9, №. 4. – С.96-103.
4. *Sakurai A.* On propagation and structure of the blast wave. // Journ. Phys. Soc. Japan. – 1953. – Vol. 8, №5; 1954 – Vol. 9, №2.
5. *Христианович С. А.* Ударные волны на значительном расстоянии от места взрыва. // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т.20, №. 5. – С.599-605.
6. *Седов Л. И.* Распространение сильных взрывных волн. // Доклады Академии Наук СССР. – 1946. – Т. 42, №1; Прикладная математика и механика. – 1946 – Т. 10, вып. 2
7. *Якимов Ю.Л.* Об асимптотических решениях уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа и об асимптотических законах затухания ударных волн. // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т.19, № 6. – С.681-692.
8. *Шефтер Г.М.* Асимптотическое решение уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа с цилиндрической симметрией // Доклады Академии Наук СССР. – 1957. – Т. 116, №4. – С. 572-575.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика.– М: Наука, 1986. – 733 с.

***Кононов О.О.***

**Асимптотичні закони затухання ударних хвиль з циліндричною симетрією.**

АНОТАЦІЯ

*Розглядається питання про загасання ударних хвиль із циліндричною симетрією. Зокрема, використовуючи метод, запропонований у роботах Седова та Якімова знайдені нові члени відомих асимптотичних розкладань і уточнені закони зміни профілю ударної хвилі.*

***Kononov A.A.***

**Asymptotic laws of attenuation of shock waves with cylindrical symmetry.**

SUMMARY

*The article deals with the attenuation of shock waves with cylindrical symmetry. In particular, using the method, proposed by Sedov and Yakimov, new members of known asymptotic expansions are found and the laws of profile change of the shock wave are improved.*