

Теплообмен для модели “составной” капли

Рассмотрена модель теплообмена для “составной” капли и проведено моделирование процесса теплообмена, полученные результаты времен прогрева для “составной” капли с точностью $\sim 30\%$ совпадают с результатами вычислений, проведенными по формуле для “сплошной” капли, что считается вполне удовлетворительным, поэтому, несмотря на разные рассматриваемые физические модели капли, по которым получены формулы, ими можно пользоваться.

Во многих случаях проведения эксперимента в потоке нагретого газа с каплями различных жидкостей подразумевается, что для исследования берется “сплошная” капля с определенным диаметром, а в действительности эксперимент проводился с “составной” каплей, т.е. жидкость обволакивает подвес определенного диаметра. Отметим, что характер теплообмена “сплошной” капли отличается от теплообмена “составной” капли, поэтому была поставлена задача, рассмотреть модель теплообмена для “составной” капли и провести моделирование процесса теплообмена.

Для теоретического рассмотрения появляется задача, когда дан “составной” шар, у которого при $0 < r < a$ металл, а при $a < r < b$ сферический слой с параметрами капли, где r переменный радиус сферы. При этом возникают контактные условия на границе раздела сред для температуры и тепловых потоков, на внешних поверхностях шара ставится условие теплообмена.

Шар радиуса b состоит из двух различных материалов: от $r = 0$ до $r = a$ из одного материала, и от $r = a$ до $r = b$ для другого вещества (рис.1).

На поверхности $r = b$ происходит теплообмен с внешней средой температуры T_c . Начальная температура шара равна T_0 , коэффициенты теплопроводности

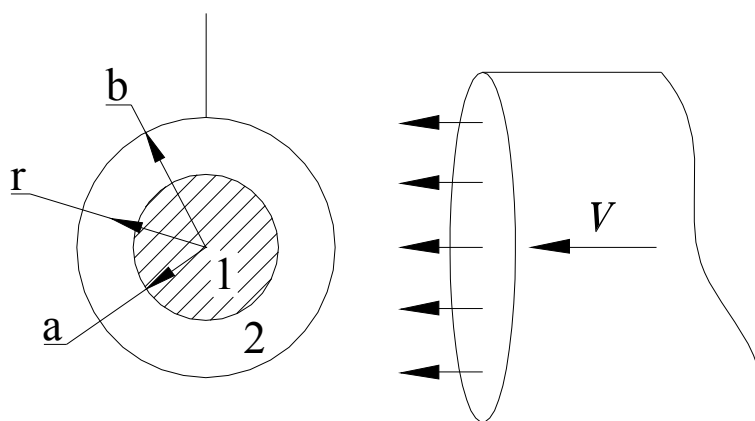


Рис.1. “Составная” капля, помещенная в поток нагретого воздуха.

сти λ_1 и λ_2 , теплоемкости c_1 и c_2 , плотности ρ_1 , ρ_2 , соответственно для составных частей шара. Тогда температуропроводность для этих частей запишется как:

$$a_1^2 = \frac{\lambda_1}{c_1 \cdot \rho_1}, \quad a_2^2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \cdot \rho_2}.$$

Решение задачи сводится к решению следующих уравнений теплопроводности в сферических координатах

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad 0 < r < a, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2^2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad a < r < b. \quad (2)$$

Начальные условия:

$$T_1|_{t=0} = T_0; \quad T_2|_{t=0} = T_0. \quad (3)$$

Условия сопряжения на границе раздела подвеса и капли

$$T_1 = T_2, \quad \text{при } r = a, \quad (4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad \text{при } r = a. \quad (5)$$

Граничное условия при $r = b$ (условие теплообмена):

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} + h(T_2 - T_c) = 0 \quad \text{при } r = b, \quad (6)$$

где h – отношение коэффициентов теплообмена α и теплопроводности среды λ_c .

Произведем замену переменных:

$$u_1 = (T_1 - T_0)r, \quad u_2 = (T_2 - T_0)r. \quad (7)$$

Тогда

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}, \quad 0 < r < a, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}, \quad a < r < b. \quad (9)$$

$$u_1|_{t=0} = 0; \quad u_2|_{t=0} = 0, \quad (10)$$

$$u_1|_{r=0} = 0. \quad (11)$$

Из условия сопряжения

$$u_1 = u_2, \quad \text{при } r = a, \quad (12)$$

$$\lambda_1 \left(a \frac{\partial u_1}{\partial r} - u_1 \right) = \lambda_2 \left(a \frac{\partial u_2}{\partial r} - u_2 \right), \quad \text{при } r = a. \quad (13)$$

Из (7), следует, что

$$T_2 = \frac{1}{r}u_2 + T_0.$$

Продифференцируем (7)

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_2$$

и из (6) получим граничное условие при $r = b$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} + \left(h - \frac{1}{b} \right) (u_2 - u_{20}) = 0, \quad \text{при } r = b, \quad (14)$$

где

$$u_{20} = \frac{hb}{h - \frac{1}{b}} (T_c - T_o).$$

Отметим, что Карслоу в работе [1] поставил задачу теплообмена составной капли, при условии поддержания постоянной температуры на внешней поверхности составной сферы, равной нулю, одна из которых представляла собой металлический шар, имеющий радиус a , коэффициент теплопроводности λ_1 , теплоемкость на единицу объема c_1 , а вторая – слой, который окружает шар из другого металла. Внешний радиус поверхности слоя равен b , теплопроводность λ_2 и теплоемкость c_2 .

Постановка задачи Карслоу отличается от рассматриваемой задачи, поскольку характер теплообмена у них разный.

Для некоторых задач связанных с рассмотрением теплообмена на поверхности шара им приведены решения, поэтому по аналогии с работой Карслоу выберем частные решения (8), (9) в виде

$$u_1 = A_1 \sin \beta r \cdot e^{-a_1^2 \beta^2 t}, \quad (15)$$

$$u_2 = \left[A_2 \sin \mu \beta (r - a) + B_2 \sin \mu \beta (b - r) \right] e^{-a_1^2 \beta^2 t}, \quad (16)$$

где $\mu = \frac{a_1}{a_2}$; τ – время.

Проверка непосредственной подстановкой показала, что выражений (15) и (16) удовлетворяют системе уравнений (8) и (9).

Точно так же, как и в той же работах [1, 2] решения (15), (16) удовлетворяют условиям (11), (12), (13), если выполняются условия

$$A_1 \sin \beta a = B_2 \sin \mu \beta (b - a),$$

$$\lambda_1 A_1 [\beta a \cos \beta a - \sin \beta a] = \lambda_2 \left[\mu \beta \sigma (A_2 - B_2 \cos(\mu \beta (b - a))) - B_2 \sin(\mu \beta (b - a)) \right],$$

где $\sigma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \mu}$.

В результате получим

$$A_2 = \Phi_1(\beta) A_1, \quad (17)$$

$$B_2 = \Phi_2(\beta) A_1, \quad (18)$$

где

$$\Phi_1(\beta) = \sigma \cos \beta a + \cos(\mu\beta(b-a)) \frac{\sin \beta a}{\sin(\mu\beta(b-a))} + \frac{1 - \mu\sigma \sin \beta a}{\mu \beta a},$$

$$\Phi_2(\beta) = \frac{\sin \beta a}{\sin(\mu\beta(b-a))}.$$

Выберем A_1 из условия выполнения равенства (14) (в частности при $\tau = 0$).

Подставив в (14) выражение частных решений (16) при $\tau = 0$, получим

$$A_2 \mu \beta \cos(\mu\beta(b-a)) - B_2 \mu \beta + \left(h - \frac{1}{b}\right) \cdot A_2 \sin(\mu\beta(b-a)) = u_{20} \left(h - \frac{1}{b}\right). \quad (19)$$

Выразим A_2 , B_2 в (19) через A_1 с помощью (17), (18). В результате получим

$$A_1 = \frac{u_{20} \left(h - \frac{1}{b}\right)}{\Phi_1(\beta) \left(\mu \beta \cos(\mu\beta(b-a)) + \left(h - \frac{1}{b}\right) \cdot \sin(\mu\beta(b-a)) \right) - \mu \beta \Phi_2(\beta)}. \quad (20)$$

Введем функцию

$$F(\beta) = \Phi_1(\beta) \cdot f(\beta) - \mu \beta \Phi_2(\beta),$$

где $f(\beta) = \mu \beta \cos(\mu\beta(b-a)) + \left(h - \frac{1}{b}\right) \cdot \sin(\mu\beta(b-a))$.

Тогда

$$A_1 = \frac{u_{20} \left(h - \frac{1}{b}\right)}{F(\beta)}.$$

Применяя операционный метод обоснованный [1], вычислим интеграл по контуру P (рис. 2). В результате придем к решениям в виде

$$u_1 = \frac{u_{20} \left(h - \frac{1}{b}\right)}{i\pi} \int_P \frac{\sin \beta r e^{-a^2 \beta^2 t}}{F(\beta) \beta} d\beta, \quad (21)$$

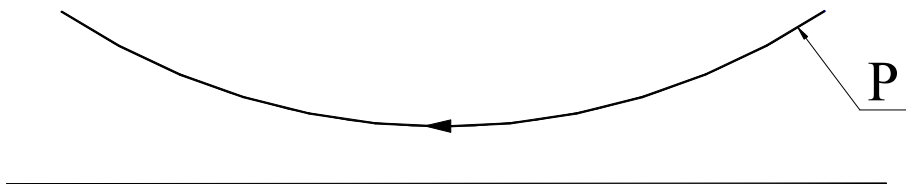


Рис. 2. Контур P в комплексной плоскости β .

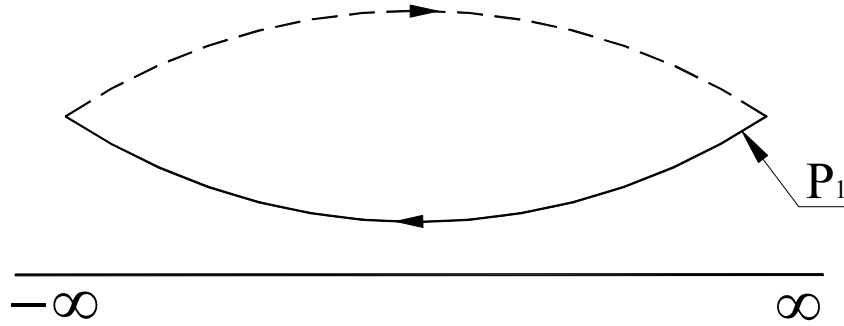


Рис. 3. Контур P_1 в комплексной плоскости β .

$$u_2 = \frac{u_{20} \left(h - \frac{1}{b} \right)}{i\pi} \int_P \left[\Phi_1(\beta) \sin(\mu\beta(r-a)) + \Phi_2(\beta) \sin(\mu\beta(b-r)) \right] \cdot \frac{e^{-a_1^2 \beta^2 t}}{\beta F(\beta)} d\beta. \quad (22)$$

Контур P (рис. 2) в плоскости β , так же как и у Карслоу [1] выбран так, что аргумент β при перемещении в бесконечность по правой ветви контура лежит в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а при движении по левой ветви – между $\frac{3}{4}\pi$ и π .

Выражения для u_1 и u_2 (21) и (22) удовлетворяют всем условиям задачи, что вытекает из самого способа их построения. Можно показать, что уравнение

$$F(\beta) = 0$$

имеет бесконечное множество действительных корней, которые не повторяются и каждому положительному корню соответствует равный по модулю отрицательный. Тогда, используя контур P_1 (рис. 3) и теорему Коши [3], можно показать выполнение начальных условий (при $t = 0$).

Построим контур Q (рис. 4), отобразив контур P (рис. 2) относительно вещественной оси и замкнув его дугами бесконечно большого радиуса. При этом легко показать, что интеграл по этим дугам исчезает [3].

Преобразуем формулы (21), (22) в интегралы по контуру Q

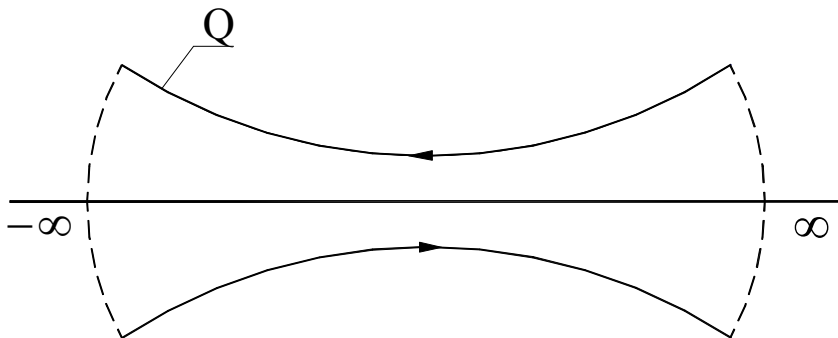


Рис. 4. Контур Q в комплексной плоскости β .

$$u_1 = \frac{hb(T_c - T_0)}{2i\pi} \int_Q \frac{\sin \beta r e^{-a_1^2 \beta^2 t}}{F(\beta) \beta} d\beta, \quad (23)$$

$$u_2 = \frac{hb(T_c - T_0)}{2i\pi} \int_Q \left[\Phi_1(\beta) \sin(\mu\beta(r-a)) + \Phi_2(\beta) \sin(\mu\beta(b-r)) \right] \cdot \frac{e^{-a_1^2 \beta^2 t}}{\beta F(\beta)} d\beta. \quad (24)$$

Так можно сделать потому, что подынтегральные выражения – четные функции β , а интегралы по дугам бесконечно большого радиуса (при $\tau > 0$) равны нулю, что доказывается в теории функций комплексного переменного [4].

Заметим, что

$$F'(0) = hb.$$

Применим теорему Коши [3] к интегралам по контуру Q (5.23) и (5.24). Тогда

$$u_1 = (T_c - T_0)r + 2hb(T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_n r e^{-a_1^2 \beta_n^2 t}}{F'(\beta_n) \beta_n},$$

$$u_2 = (T_c - T_0)r + 2hb(T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi_1(\beta_n) \sin(\mu\beta_n(r-a)) + \right.$$

$$\left. + \Phi_2(\beta_n) \sin(\mu\beta_n(b-r)) \right] \frac{e^{-a_1^2 \beta_n^2 t}}{\beta_n F'(\beta_n)}$$

Из (7) получаем выражения для искомым функций T_1 и T_2 :

$$T_1 = T_c + 2hb(T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_n r e^{-a_1^2 \beta_n^2 t}}{r \beta_n F'(\beta_n)}, \quad \text{при } 0 < r < a, \quad (25)$$

$$T_2 = T_c + \frac{2hb(T_c - T_0)}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi_1(\beta_n) \sin(\mu\beta_n(r-a)) + \right.$$

$$\left. + \Phi_2(\beta_n) \sin(\mu\beta_n(b-r)) \right] \frac{e^{-a_1^2 \beta_n^2 t}}{\beta_n F'(\beta_n)} \quad \text{при } a < r < b. \quad (26)$$

Ряды (25), (26) очень быстро сходятся (общий член рядов экспоненциально затухает), поэтому на верхнем пределе сумм вместо ∞ достаточно поставить величину порядка нескольких единиц.

Таким образом, (25) и (26) дают искомое решение задачи, причем $T_2(r, t)$ – это температура сферического слоя с параметрами материала капли.

Из (26) следует, что $T_2(r, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_c$, т.е. при длительном нахождении капли в нагретой среде, ее температура сравнялась бы с температурой окружающей среды, если бы не происходило ее испарение.

Для установления времени прогрева капли, необходимо решить трансцендентное уравнение вида

$$T_2(r, t) \Big|_{r=(a+b)/2} = T_k, \quad (27)$$

где T_k – температура кипения капли, а $T_2(r, t)$ – определяется (26).

Решение уравнения (27) проводят методом деления отрезка пополам в среде Mathcad [5]. Используя соответствующую разработанную программу, определяем время прогрева t_{np} .

Аналогичные вычисления времени прогрева проведем по известной формуле:

$$t_{np.} = \frac{2c_{жс}\rho_{жс}r_k^2}{3Nu\lambda_c} \cdot \ln \frac{\bar{T} - T}{T^* - T} \quad (28)$$

Отметим, что эта формула получена для “сплошной” капли.

Для проверки адекватности полученных результатов времени прогрева рассчитанных по (27) и (28) проведем их сравнение.

Используем значения для солярового масла [6]: $T_o = 293$ К; $T = 473$ К; $\rho_{жс} = 900$ кг/м³; $\lambda_{жс} = 0.1163$ Вт/(м·К.); $c_{жс} = 2093$ Дж/(кг·град.); $\lambda_{г} = 0.0698$ Вт/(м·К.); $T_{cp} = 1473$ К; диаметры капли 0.01·мм, 0.1 мм, 1.0 мм, 2.0 мм, $Nu = 2$.

Результаты вычислений времени прогрева приведены в табл. 1 для разных диаметров капли. При расчете по (27) диаметр подвеса приняли равным $0.2 \cdot 10^{-6}$ м.

Как видно из таблицы результаты полученных значений вычисленных по формуле (28) и (27) совпадают с точностью ~ 30 %, что считается вполне удовлетворительным. Поэтому, несмотря на разные рассматриваемые физические модели капли, по которым получены формулы, ими можно пользоваться.

С целью математического моделирования процесса теплообмена для “составной” капли проведем анализ полученного выражения для определения времени прогрева “составной” капли по разным характеристикам и свойствам жидкости.

Таблица 1. Результаты вычислений времени прогрева

Диаметр капли, мм	0.01	0.1	1.0	2.0
Время прогрева по (28), мс	3.72	3.72	372	1490
Время прогрева по (27), мс	4.88	4,77	478	1910

Таблица 2. Значения диаметры подвеса и диаметра капли

Диаметр подвеса, мм	Диаметр капли на подвесе, мм
0.75	1.3
0.85	1.5
0.95	1.7
1.1	1.9
1.1	2.0
1.2	2.1
1.3	2.3
1.4	2.5

Таблица 3. Характеристики рапсового масла и железа

Характеристики	PM	Железо
Теплоемкость, c , Дж/(кг·К.)	2179	460
Плотность, ρ , кг/м ³	916	7800
Теплопроводность, λ , Вт/(м·К.)	0.175	45
Температура кипения, T , К	703	–

Таблица 4. Свойства нагретого воздуха до определенной температуры

Температура, К	Плотность, кг/м ³	Динамическая вязкость, 10^7 кг/(м·с)
973	0.362898	417.0
993	0.35547	422.2
1013	0.348502	427.4
1023	0.345142	430.0
1033	0.341782	432.6
1053	0.335153	437.8
1073	0.329041	443.0

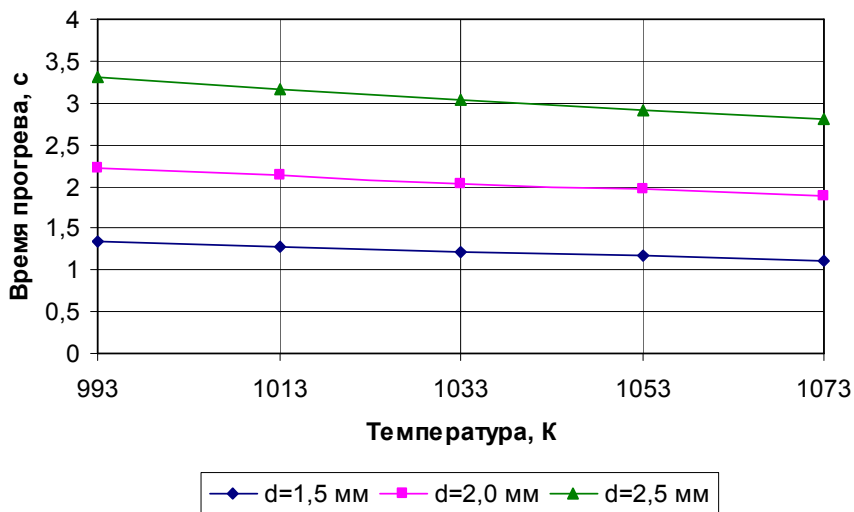


Рис. 5. Зависимость времени прогрева “составной” капли от температуры потока воздуха, при скорости потока 1.7 м/с

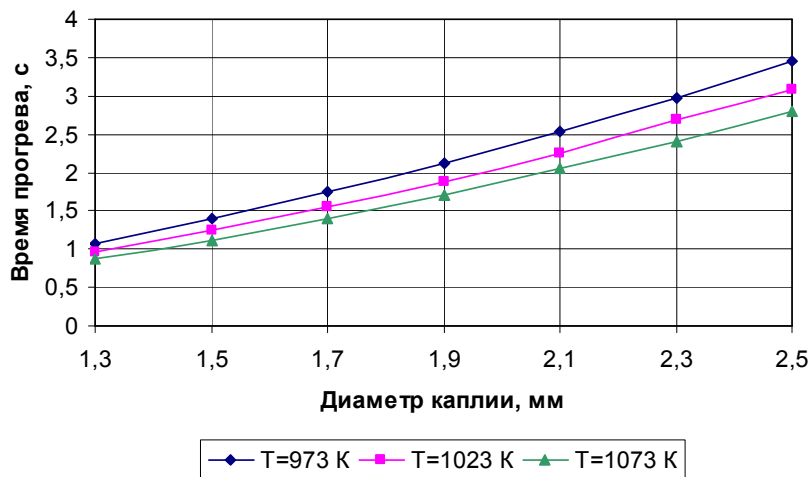


Рис. 6. Зависимость времени прогрева “составной” капли от размеров, при скорости потока 1.7 м/с

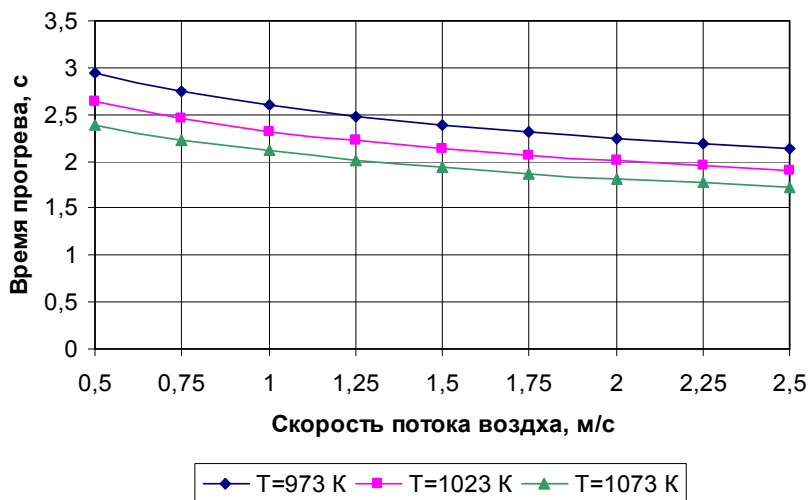


Рис. 7. Зависимость времени прогрева “составной” капли от скорости потока воздуха, при диаметре 2 мм

Для проведения математического моделирования возьмем различные диаметры подвеса и соответственно определим диаметр полученной капли (жидкого слоя и подвеса). Эти данные представлены в табл. 2.

В качестве исследуемого слоя жидкости выберем рапсовое масло, а материалом подвеса – железо.

Характеристики рапсового масла (РМ) и железного подвеса приведены в табл. 3. “Составная” капля помещается в нагретый поток воздуха. В табл. 4 приведена температура, при которой находится “составная” капля и свойства воздуха при этих температурах.

Данные характеристики и свойства подставляем в программу в среде Mathcad для решения выражения (27), в условиях, в которых находится “составная” капля. Построим зависимости времени прогрева от температуры потока воздуха, при скорости потока 1.7 м/с (рис. 5), от размеров “составной” капли, при скорости потока 1.7 м/с (рис. 6), от скорости потока воздуха v , при диаметре 2 мм (рис. 7).

Полученные зависимости могут быть полезны для сопоставления результатов математического моделирования с данными физического эксперимента по определению времени прогрева “составной” капли.

Литература:

1. Теория теплопроводности // Г.С. Карслоу; пер. с англ. А.А. Померанцева, Е.Г. Швидковского // под ред. А.С. Предводителя. – М.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947. – 288 с.
2. Теплопроводность твердых тел // Г.С. Карслоу, Д.К. Егер; пер. с англ. А.А. Померанцева. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
3. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов // Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
4. Основы теории аналитических функций комплексного переменного : учебник для вузов // А.В. Буцадзе. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. Численные методы: учебное пособие для вузов // Е.А. Волков. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
6. Сжигание мазута в топках котлов // В.А. Адамов. – Л.: Недра, 1989. – 304 с.

Селіванов С.Є.

Теплообмін для моделі “складової” краплі

АНОТАЦІЯ

Розглянута модель теплообміну для “складовій” краплі й проведене моделювання процесу теплообміну, отримані результати часів прогріву для “складовій” краплі з точністю $\sim 30\%$ збігаються з результатами обчислень, проведеними за формулою для “суцільної” краплі, що вважається цілком задовільним, тому, незважаючи на різні розглянуті фізичні моделі краплі, по яких отримані формули, ними можна користуватися.

Selivanov S.E.

Heat exchange for the model of “component” drop

SUMMARY

The model of a “component” drop heat exchange is considered and the modeling of heat exchange process is carried out. Obtained results of warming up times for a “component” drop with exactness $\sim 30\%$ coincide with the results of calculations, carried out for “continuous” drop. This is considered to be satisfactory; therefore, despite the different modeling approach of the drop, in scope of which equations are received, the latest may be used.