

УДК 536.248.2:532.529.5

Дорошенко А.В.¹, Антонова А.Р.¹, Глауберман М.А.²

¹Одесская государственная академия холода, г. Одесса

²ИНВЦ при ОНУ имени И.И. Мечникова, г. Одесса

Изучение течения тонкого слоя вязкой жидкости по наклонной поверхности в канале с газовым потоком

Одно из перспективных направлений солнечной энергетики - многофункциональные солнечные системы на основе открытого абсорбционного цикла. Сердцем таких систем является солнечный газо-жидкостной коллектор с гравитационным течением жидкостной пленки для прямой (непосредственной) регенерации абсорбента. Из условий его эксплуатации возникает задача пленочного течения жидкостной пленки по наклонной к горизонту поверхности, включая задачу устойчивости таких течений при гидродинамическом взаимодействии потоков газа и жидкости.

1. Основные уравнения. Математическая модель течения пленки жидкости представляется следующей системой уравнений и граничных условий [1]: уравнения движения пленки жидкости

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin \beta, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cos \beta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Граничные условия:

на наклонной поверхности при $y = 0$: $u = v = 0$ (условие прилипания),

на свободной поверхности при $y = h(t, x)$.

Кинематическое условие (частицы жидкости остаются на свободной поверхности):

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Динамические условия:

непрерывность нормальных напряжений:

$$p + \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = p_0;$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p_0 - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}. \quad (2)$$

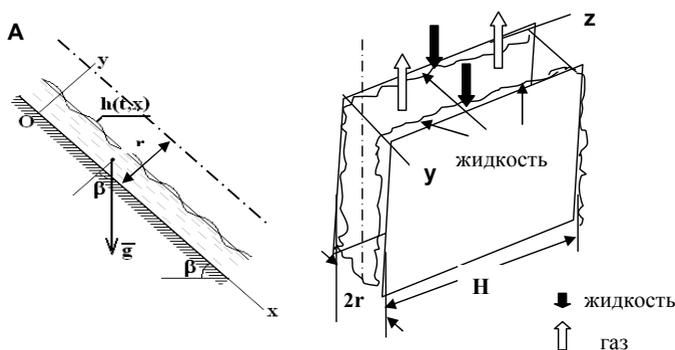


Рис 1. Схема противоточного течения жидкости и газа в канале солнечного коллектора

непрерывность касательных напряжений:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm \frac{\tau}{\mu}, \quad (\langle + \rangle - \text{прямоток}, \langle - \rangle - \text{противоток}); \quad (3)$$

где $\tau = \frac{\lambda \rho_r v_r^2}{8}$ – касательное напряжение на поверхности раздела, Н/м²,

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\lambda \rho_r v_r^2}{4r} = \frac{2\tau}{r}.$$

В условии (1) предполагается, что касательное напряжение τ со стороны газа постоянно из тех соображений, что при регулярноволновом режиме пленочного течения жидкости, при значительных скоростях движения газа имеет много общего с турбулентным потоком несжимаемой жидкости в трубах с шероховатостью стенки. В соответствии с таким модельным представлением воздействия газового потока на свободную поверхность пленки жидкости, рассмотрим установившийся поток газа в плоском канале насадки теплообменного аппарата с шероховатыми стенками (здесь роль шероховатости выполняет регулярноволновой рельеф свободной поверхности пленки) (рис.1)

Выделим элементарный участок потока размером $dx \cdot 2 \cdot (r - \delta) \cdot H$ ($2r$ – ширина канала). Баланс сил, действующих на выделенный элементарный объём газа, представляется следующим уравнением:

$$\Delta p_r \cdot 2(r - \delta) \cdot H = 2\tau H \Delta x, \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ получаем } \frac{dp_r}{dx} = \frac{\tau}{r - \delta} = \frac{\tau}{r(1 - \delta/r)},$$

Учитывая, что $\delta/r \ll 1$, имеем при $y = h$:

$$\frac{dp_r}{dx} = \pm \frac{\tau}{r}. \quad (4)$$

В формуле (4) знак «+» соответствует прямоотку течения жидкости и газа, а знак «-» – противоток. В дальнейшем в данной статье будут представлены аналитические выкладки для режима противотока, которые при учете знака могут быть использованы и для прямотока.

Здесь λ – гидравлический коэффициент трения на шероховатой поверхности стенки канала; ρ_r – плотность газа, кг/м³; v_r – средняя по расходу скорость газа, м/с. Гидравлический коэффициент трения, учитывая диапазон изменения скорости газа для тепломассообменных аппаратов, определяем по формуле А.Д. Альтшуля:

$$\lambda = 0.11 \left(\frac{\Delta_{\text{ЭКВ}}}{D} + \frac{68}{\text{Re}_r} \right)^{0.25} \quad (5)$$

Здесь $\Delta_{\text{ЭКВ}}$ – эквивалентная шероховатость поверхности стенки, м. В нашем случае эквивалентная шероховатость определяется высотой регулярной волны, т.е.

$$\Delta_{\text{ЭКВ}} = 2\alpha, \quad (6)$$

α – эквивалентная амплитуда регулярной волны, м; D – эквивалентный диаметр канала, м; определяется соотношением:

$$D = \frac{4S}{P},$$

где S – поперечное сечение канала, м²; P – смоченный периметр, м.

Для плоского канала прямоугольного сечения: $S = 2(r-\delta) \cdot H$; $P = 2H + 4(r-\delta)$, следовательно,

$$D = \frac{8(r-\delta)H}{2H + 4(r-\delta)} = \frac{4(r-\delta)}{1 + 2\frac{r-\delta}{H}}.$$

Учитывая, что $r/H \ll 1$, $\delta/r \ll 1$, получим

$$D = 4r. \quad (7)$$

Число Рейнольдса по газу

$$\text{Re}_r = \frac{Dv_r}{\nu_r} \quad (8)$$

где v_r – средняя по расходу скорость газа, м/с; ν_r – кинематическая вязкость газа, м²/с.

Таким образом, соотношения (4) – (8) однозначным образом определяют контактное динамическое воздействие турбулентного газового потока на ламинарно-безволновое течение плёнки жидкости.

2. Ламинарный безволновой режим.

Для ламинарного безволнового режима течения пленки жидкости

$$h = h_0 - \text{const}, \quad q = q_0 - \text{const}. \quad (9)$$

Толщина слоя жидкости h_0 при заданном расходе определяется из кубического уравнения:

$$h_0^3 - \frac{3}{2} \frac{\tau}{\rho g \sin \beta} h_0^2 - \frac{3\nu q_0}{g \sin \beta} = 0. \quad (10)$$

Здесь учтено, что $h_0/r \ll 1$.

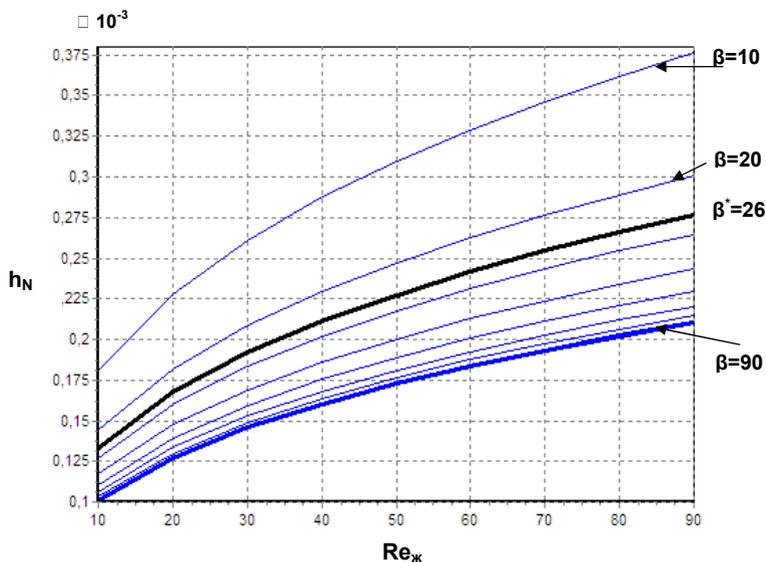


Рис. 2. График зависимости $h_N = h_N(Re_{ж})$. Средняя толщина пленки жидкости при течи по вертикальной и наклонной поверхностям (угол наклона $\beta = 10^\circ \dots 90^\circ$, угол $\beta = 26^\circ$ соответствует оптимальному углу наклона коллектора в Одессе [1], число Рейнольдса Re изменяется от 10 до 90.

При неподвижном газовом потоке ($\tau = 0$) толщина пленки жидкости определяется по формуле Нуссельта [7]:

$$h_N = \sqrt[3]{\frac{3\nu q_0}{g \sin \beta}},$$

Приведем уравнение (10) к безразмерной форме относительно безразмерной толщины пленки $h_1 = h/h_N$. В результате:

$$h_1^3 - \tau_1 h_1^2 - 1 = 0. \quad (11)$$

Здесь τ_1 безразмерное касательное напряжение

$$\tau_1 = \frac{3\tau}{2\rho g h_N \sin \beta}.$$

Решения уравнения (11) изображены на рис. 3а и 3б. При слабом гидродинамическом взаимодействии, при $\tau_1 \ll 1$ толщина слоя жидкости определяется соотношением:

$$h_0 = h_N \left(1 + \frac{\tau_1}{3} \right) = h_N + \frac{\tau}{2\rho g \sin \beta}.$$

Из уравнения (10) следует, что в режиме противотока расход жидкости q_0 приобретает отрицательное значение при $\frac{\tau}{\rho g \sin \beta} > \frac{2}{3}$. Т. е. имеет место «захле-

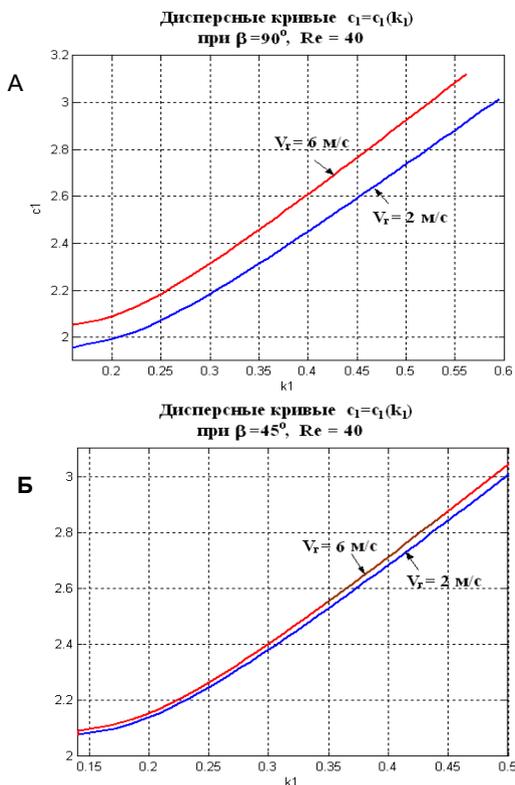


Рис 3. Дисперсные кривые для вертикальной и наклонной поверхностей, числа Рейнольдса $Re = 40$, скорости газа $v_g = 2$ м/с и $v_g = 6$ м/с
 А - для угла наклона $\beta = 90^\circ$; Б – дисперсные кривые для угла наклона $\beta = 45^\circ$.
 (диапазон скоростей движения газового потока v_g обусловлен реальностями работы газо-жидкостного солнечного коллектора в вариантах с естественной и принудительной циркуляцией воздушного потока)

бывание» (режим, при котором противоточное движение трансформируется в режим восходящего противотока с выносом газовым потоком жидкости из рабочей зоны аппарата).

Распределение продольной скорости плёнки жидкости при ламинарном течении определяется формулой:

$$u_0(y) = \frac{3q_0 y}{h_0^2} \left(1 - \frac{y}{2h_0}\right) + \frac{\tau y}{2\mu} \left(1 - \frac{3y}{2h_0}\right).$$

Приведём данное соотношение к безразмерному виду, учитывая что

$$c_1 = \frac{u_0 h_0}{q_0}, \quad y_1 = \frac{y}{h_0}, \quad h_1 = \frac{h_0}{h_N}, \quad \tau_1 = \frac{3\tau}{2\rho g h_N \sin\beta}.$$

В результате получим: $u_1(y_1) = 3y_1 \left(1 - \frac{y_1}{2}\right) \mp \tau_1 h_1^2 y_1 \left(1 - \frac{3}{2} y_1\right)$.

В случае противотока: $u_1(y_1) = (3 + b)y_1 - \frac{3}{2} y_1^2 (1 + b)$.

Учитывая решение уравнения (11) при изменении величины τ_1 от 0 до 1, толщина пленки жидкости h_1 и величина b изменяются монотонно в пределах (рис.5)

$$0.7549 \leq h_1 \leq 1; \quad 0 \leq b \leq 0.5699.$$

3. Устойчивость ламинарного безволнового плёночного течения в контакте с газовым потоком.

Пусть на свободной поверхности безволнового течения (9) – (10) возникает малое возмущение в виде бегущей волны:

$$h = h_0(1 + \varphi),$$

где $\varphi = \varphi(kx - \omega t) = \varphi(k(x - ct))$ (при $\varphi < 1$), k – волновое число, $1/m$; ω – частота возмущений, $1/c$; c – фазовая скорость волны, m/c ; ($c = \omega / k$).

Эволюция возмущения φ должна определяться из системы исходных уравнений (1) и (2). Неизвестные функции $q = q(t, x)$ и $h = h(t, x)$ данной системы определяем в виде бегущей волны

$$h = h(kx - \omega t) = h(\xi), \quad q = q(kx - \omega t) = q(\xi).$$

В таком случае:

$$q = ch + q_0 - ch_0 = ch + z.$$

Здесь $q_0 - ch_0 = z$ (const).

Учитывая, что $\frac{\partial h}{\partial t} = -\omega \frac{\partial h}{\partial \xi}$, $\frac{\partial h}{\partial x} = k \frac{\partial h}{\partial \xi}$, $\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = k^3 \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3}$, получим:

$$\frac{\sigma}{\rho} k^3 h^3 h''' + \left(c \omega h^2 - 2,4 h q c k + 1,2 q^2 k - g h^3 k \cos \beta \mp \frac{k \tau h^2}{20 \mu} (ch + q) - \frac{\tau^2 k h^4}{40 \mu^2} \right) h' \\ \pm \frac{3}{2} h^2 \frac{\tau}{\rho} \left(1 + \frac{2h}{3r} \right) + g h^3 \sin \beta - 3vq = 0.$$

Откуда для возмущения φ свободной поверхности $h = h_0(1 + \varphi)$ с точностью до членов второго порядка малости $O(\varphi^2)$ получим:

$$\frac{\sigma}{\rho} k^3 h_0^4 \varphi''' + k h_0 \left(c^2 h_0^2 - 2,4 h_0 q_0 c + 1,2 q_0^2 - g h_0^3 \cos \beta \mp \frac{h_0^2 \tau}{20 \mu} (ch_0 + q_0) - \frac{h_0^4 \tau^2}{40 \mu^2} \right) \varphi' + \\ 3(-vc h_0 + g h_0^3 \sin \beta \pm \frac{\tau}{\rho} h_0^2) \cdot \varphi = 0$$

Приведем данное уравнение к безразмерному виду. Введём следующие безразмерные величины $k_1 = k h_0$, $c_1 = c \frac{h_0}{q_0}$, $We = \frac{\rho q_0^2}{\sigma h_0}$ – число Вебера, $Re = \frac{q_0}{v}$ –

число Рейнольдса, $\tau_1 = \frac{3\tau}{2\rho gh_N \sin\beta}$, $h_1 = \frac{h_0}{h_N}$. По-прежнему $h_N = \sqrt[3]{\frac{3\nu q_0}{g \sin\beta}}$ и h_1 определяется из уравнения (11), и $\frac{\tau h_0^2}{\rho \nu q_0} = \frac{2}{3} \tau_1 h_1^2$.

В результате:

$$\begin{aligned} \varphi''' + \frac{We}{k_1^2} (c_1^2 - [2,4 - \frac{\tau_1 h_1^2}{30}] c_1 + [1,2 + \frac{\tau_1 h_1^2}{30} - \frac{\tau_1^2 h_1^4}{90} - \frac{3h_1^3}{Re} \text{ctg}\beta]) \varphi' + \\ + \frac{We}{k_1^3 Re} (3h_1^3 - c_1 - \frac{2}{3} \tau_1 h_1^2) \varphi = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения (12) ищем в виде малого по амплитуде длинноволнового возмущения:

$$\varphi(t, x) = \alpha \exp(ik(x - ct)), \quad (\alpha < 1, \quad k \cdot h_0 < 1).$$

Положим $c_1 = c_{re} + i c_{im}$, т.е. $\varphi(t, x) = \alpha \exp(k c_{im}) \exp(ik(x - c_{re} t))$.

Здесь $k c_{im} = \gamma$ – временной инкремент колебаний. Если $k c_{im} < 0$, то возмущение φ с течением времени стремится к нулю. В противном случае, когда $k c_{im} > 0$ возмущение φ растёт с течением времени и безволновой ламинарный режим течения в этом случае неустойчив.

Представим возмущение φ через безразмерные переменные:

$$\varphi(t, x) = \alpha \exp(ik(x - ct)) = \alpha \exp(ik_1(x_1 - c_1 t_1)),$$

где $x_1 = \frac{x}{h_0}$, $k_1 = k h_0$, $c_1 = c \frac{h_0}{q_0}$, $t_1 = \frac{q_0}{h_0^2} t$.

Подстановка этого выражения в уравнение (12), получим:

$$-k_1^3 + ik_1 We (c_{re}^2 + 2c_{im} i - c_{im}^2 - p_1 c_{re} - p_1 c_{im} i + g_1) - \frac{3We}{Re} (c_{re} + i c_{im} - b_1) = 0.$$

Разделив действительную и мнимую части, получим следующие дисперсные соотношения:

$$k_1 c_{im} (2c_{re} - p_1) + \frac{3}{Re} (c_{re} - b_1) = 0, \quad (13)$$

$$k_1^3 - k_1 We (c_{re}^2 - c_{im}^2 - p_1 c_{re} + g_1) + \frac{3We}{Re} c_{im} = 0. \quad (14)$$

Из соотношения (13) определяем временной инкремент:

$$\gamma = k_1 c_{im} = -\frac{3}{Re} \frac{(c_{re} - b_1)}{(2c_{re} - p_1)}. \quad (15)$$

Откуда условие устойчивости $\gamma = k c_{im} < 0$ выполняется, если

$$0 < c_{re} < C_- = 1.2 - \frac{\tau_1 h_1^2}{60} \quad \text{и} \quad c_{re} > C_+ > 3 + \frac{2}{3} \tau_1 h_1^2$$

В противном случае, когда $C_- < c_{re} < C_+$, ламинарное безволновое течение неустойчиво ($k c_{im} > 0$), амплитуда прогрессивной волны возмущения растёт с течением временем вниз по потоку.

Из соотношения (14): $k_1^4 - k_1^2 \text{We} (c_{re}^2 - p_1 c_{re} + g_1) + k_1 c_{im} \text{We} \left(k_1 c_{im} + \frac{3}{\text{Re}} \right) = 0$.

Учитывая (15) и полагая $c_{re} = c_1$, получим биквадратное уравнение относительно волнового числа k_1 , решение которого

$$k_1^2 = -\frac{\text{We}}{2} (c_1^2 - p_1 c_1 + g_1) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{36(c_1 - b_1)(c_1 + b_2)}{\text{WeRe}^2 (c_1^2 - p_1 c_1 + g_1)^2 (2c_1 - p_1)^2}} \right].$$

Для нейтральной волны ($\gamma = kc_{im} = 0$)

$$c_{1n} = b_1, \quad k_{1n} = \sqrt{3\text{We} \left(1 \mp \frac{38}{45} \tau_1 h_1^2 + \frac{41}{270} \tau_1^2 h_1^4 - \frac{h_1^2}{\text{Re}} \text{ctg} \beta \right)}. \quad (16)$$

На рис. 3 изображены дискретные кривые $c_1 = c_1(k_1)$ соотношения (15).

Дисперсные кривые для растущих волн ($C_- < c_1 < C_+$) имеют точки минимума фазовой скорости C_{\min} , эти точки соответствуют максимальным значениям инкремента γ .

4. Волны максимального роста. Волны максимального роста в области потери устойчивости ($C_- < c_1 < C_+$) имеют наибольший инкремент γ . Для определения характеристик волн максимального роста необходимо решить задачу нелинейного программирования для целевой функции:

$$\gamma = -\frac{3}{\text{Re}} \frac{c_1 - b_1}{2c_1 - p_1} \rightarrow \max \text{ при наличии ограничений:}$$

- дисперсное соотношение (16);
- $C_- < c_1 < C_+$;
- $k_1 > 0$.

Можно показать, что данная задача с учётом условия экстремума $\frac{\partial c_1}{\partial k_1} = 0$

сводится к решению уравнения:

$$\text{WeRe}^2 (c_1^2 - p_1 c_1 + g_1)^2 (2c_1 - p_1)^2 + 36(c_1 - b_1)(c_1 + b_2) = 0.$$

относительно фазовой скорости c_1 .

Волновое число k_1 и длина волны λ_1 волн максимального роста определяют по формулам:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\text{We}}{2} (c_1^2 - p_1 c_1 + g_1)}, \quad \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

На рис. 4а, 4б представлены зависимости характеристик фазовой скорости c_1 и волнового числа k_1 волн максимального роста от числа Рейнольдса при углах наклона $\beta = 45^\circ$ и скорости газа $v_r = 2$ м/с и $v_r = 6$ м/с.

Для нейтральных волн ($c_1 = b_1$) малой амплитуды уравнение (12):

$$\varphi''' + \frac{\text{We}}{k_1^2} (b_1^2 - p_1 b_1 + g_1) \varphi' = 0, \quad (17)$$

периодическое решение данного уравнения:

$$\varphi = \alpha \sin(k_1 x_1 - b_1 t_1),$$

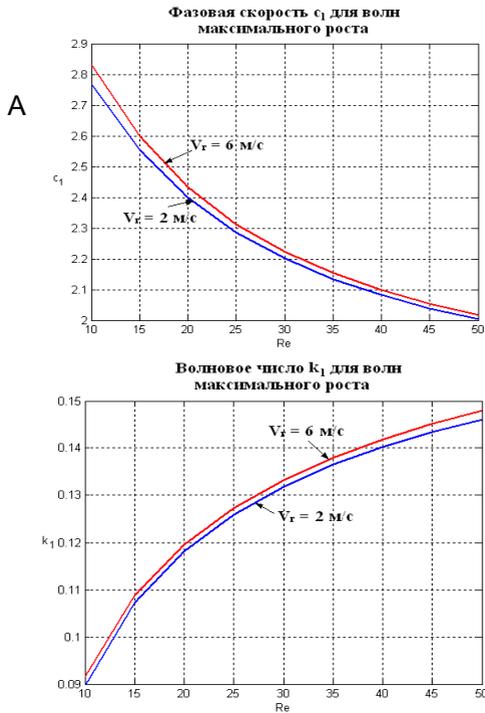


Рис 4.

*A – фазовая скорость C_1 для волн максимального роста, угол наклона $\beta = 45^0$
 B – волновое число k_1 для волн максимального роста для угла наклона $\beta = 90^0$
 (скорость газа $v_g = 2$ м/с и $v_g = 6$ м/с)*

где $k_1 = \sqrt{We(b_1^2 - p_1 b_1 + g_1)}$.

Исключение составляют углы наклона β и скорости газа, для которых

$$b_1^2 - p_1 b_1 + g_1 = 0.$$

в этом случае периодическое решение (17) отсутствует.

ВЫВОДЫ:

В работе показано, что:

1. Волновое число k_1 максимально растущих волн для заданного расхода жидкости при движении по наклонной поверхности меньше числа k_l при движении по наклонной поверхности;
2. Длина волны λ_1 , определяется соотношением (4.3) и при увеличении угла наклона поверхности уменьшается;
3. Средняя толщина пленки жидкости при волновом течении меньше, чем толщина этой пленки при ламинарном течении: $h_{\text{волн}} < h_0$ при одном и том же воздействии потока газа.

Литература:

1. Горин А.Н., Дорошенко А.В., Глауберман М.А. Солнечная энергетика. (Теория, разработка, практика). – Донецк: Норд-Пресс, 2008. – 374 с.
2. Hellman, H.M., Grossman G. Simulation and analysis of an open-cycle dehumidifier-evaporator (DER) absorption chiller for low-grade heat utilization. // Int. J. Refrig. –Vol. 18, № 3. – 1995. – P. 177-189.
3. Каница П.Л. Волновое течение тонких слоёв жидкости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1948. – Т. 18, №. 1. – С. 3 – 28.
4. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – №1. – С. 43 – 51.
5. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Штейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. – М.- Энергоатомиздат, 1990. – 248 с.
6. Справочник по гидравлике./ Под ред. В.А.Большакова. – К.: Вища шк. Головне изд., 1984. – 343 с.
7. Nusselt W. Zeitschrift // VDI. – 1916. – V. 60, № 27. – P. 514-546; № 287. – P. 569-575; 1923. – V. 67, №9. – P. 206-210.

Дорошенко О.В., Антонова А.Р., Глауберман М.А.

Дослідження тонкого шару в'язкої рідини по нахиленій поверхні в каналі з газовим потоком

АНОТАЦІЯ

Одним з перспективних напрямків розвитку сонячної енергетики являються багатофункціональні сонячні системи на основі відкритого абсорбційного циклу. Серцем таких систем є сонячний газо-рідинний колектор з гравітаційною течією рідинної плівки для прямої (безпосередньої) регенерації абсорбенту. З умов його експлуатації виникає задача течії рідинної плівки по нахиленій до горизонту поверхні, включаючи питання стійкості таких течій при гідродинамічній взаємодії потоків газу та рідини.

Doroshenko A.V., Antonova A.R., Glauberman M.A.

Research of current of a thin layer of a viscous liquid on inclined surfaces in the channel with a gas flow

SUMMARY

One of perspective directions of development of solar power are the multifunctional solar systems on the basis of open absorption cycle. Heart of such systems is the solar gas-liquid collector with gravitational current of a liquid film for a direct regeneration absorbent. From conditions of its operation there is a task of film current of a liquid film on inclined to horizon of a surface, including questions of stability of such currents at hydrodynamical interaction of flows of gas and liquid.