

ГАЗОДИНАМІКА

УДК 551.577

Асланов С. А., Косой М. Б.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

Моделирование распада тонкой жидкой струи на капли

На основе уравнений баланса массы и энергии построена замкнутая модель процесса непрерывной деформации и последующего распада тонкой жидкой струи на капли под воздействием сил поверхностного натяжения. Построенная модель включает две стадии непрерывной деформации участка цилиндрической струи: деформация слабо возмущённой поверхности синусоидального типа до эллиптической капли с конечными значениями кривизны; деформация эллиптической капли в равнообъёмную сферическую. Получены выражения работ сил поверхностного натяжения на каждом этапе деформирования. Произведённый математический анализ уравнения баланса массы и энергии позволил однозначно определить относительную величину среднего диаметра образующихся капель и расстояний между ними. Полученные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными наблюдениями Савара и Плато.

Введение. Экспериментальные исследования поведения струи жидкости, выпускаемой в газообразную среду показывают, что эти струи дробятся на мелкие капли. Изучение математическими средствами этого явления начал Рэлей в своей работе [1]. Он показал, что причиной распада струи является неустойчивость движения поверхности струи, вызванная внешними, либо внутренними возмущениями и капиллярными силами, действующими по поверхности. Рэлей решил линейную задачу о распространении малых возмущений по поверхности струи идеальной жидкости без влияния тяготения, но с учётом сил поверхностного натяжения. Он установил, что под воздействием малых возмущений поверхность струи принимает форму синусоидального типа. Такая струя представляет собой чередующиеся области радиального расширения и сжатия к оси. В случае, когда длина волны λ синусоидальной поверхности струи превышает длину окружности её поперечного сечения в невозмущённом состоянии, возмущения поверхности будут нарастать с течением времени. Это вызвано тем, что в областях сужения струи кривизна поверхности, а, следовательно, и силы поверхностного натяжения больше, чем в областях расширения. Это вызовет поток жидкости в струе из области сужения в область расширения, что в свою очередь приведёт к дальнейшему уменьшению радиуса сечения струи в области сужения, и его увеличению в области расширения. Из экспериментальных снимков [2] видно, что дальнейшая деформация струи приведёт к соседним явно выделенным разбухшим фрагментам струи, соединённым жидкой перемычкой. На последней стадии деформации происходит отрыв разбухших фрагментов струи от этой перемычки и разрушение самой перемычки на более мелкие

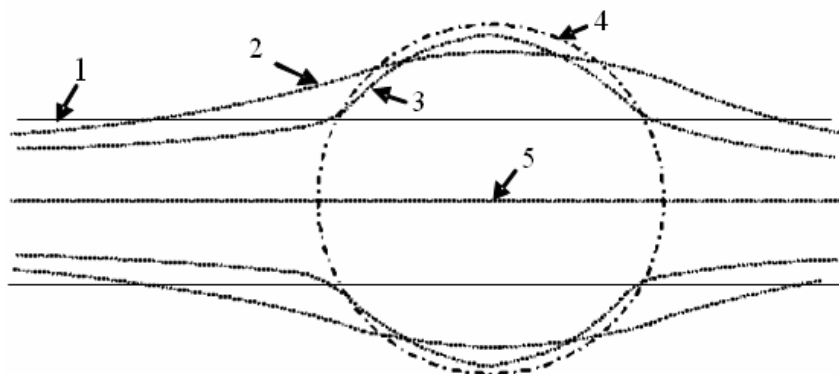


Рис.1 Контур поверхности деформируемой струи:

- 1 – контур участка цилиндрической струи;
- 2 – контур участка синусоидальной струи на этапе малых возмущений её поверхности;
- 3 – контур струи, получающийся при росте возмущений её поверхности;
- 4 – контур сферической капли, полученной в результате разрыва струи;
- 5 – ось струи.

капли. Объем образовавшихся капель под действием сил поверхностного натяжения со временем примет сферическую форму конечного радиуса.

Линейный анализ устойчивости, предпринятый Рэлеем, не может количественно объяснить процесс на стадии распада струи на капли. Однако Рэлей получил величину длины волны синусоидального возмущения поверхности, при которой неустойчивость нарастает с максимальным темпом, а именно $\lambda = 4.51 \times (2a)$. А в работе [3] Плато, по результатам опытных наблюдений Савара, дал оценку для длины волны начинающегося регулярного распада струи $\lambda = 4.38 \times (2a)$.

Стадия распада жидкой струи рассмотрена в работе [4] с использованием интегральных законов сохранения массы и энергии массы. В работе были получены оценки относительного радиуса образованной сферической капли $a/R = 0.53$, а также расстояние между соседними каплями $\lambda + 0.5\Delta\lambda = 4.48 \times (2a)$. Однако разрыв струи и образование капли как непрерывный процесс не моделировался, а рассматривались лишь начальное, до разрыва, и конечное, после разрыва, состояния исследуемой части струи.

В данной работе моделируется процесс разрыва струи на капли, то есть моделируется деформирование цилиндрического фрагмента струи в объем жидкости сферической формы.

Постановка задачи. Анализ экспериментальных снимков [2] позволяет сделать следующие предположения. Цилиндрический участок струи длиной 2λ , при которой наблюдается наиболее сильный рост возмущений её поверхности, под действием сил поверхностного натяжения с течением времени деформируется в выпуклую фигуру вращения, близкую по форме к части эллипсоида вра-

щения без сферических оконечностей (Рис.1). Две соседние выпуклые части соединяются жидкой перемычкой, которая также представляет собой фигуру вращения с общей осью вращения, что и эллипсоид. Кривизна поверхности эллипсоида в каждой точке характеризуется кривизной пересечения поверхности эллипсоида с меридиональным его сечением, проходящим через его большую ось, и кривизной первого вертикала (кривизной пересечения поверхности эллипсоида с поперечным его сечением, нормальным к поверхности). Обе кривизны положительные, так как эти сечения выпуклы по отношению к окружающему пространству. Аналогично определяются кривизны и для перемычки, однако её продольная кривизна имеет отрицательный знак. Так как поверхности вогнутой и выпуклой части струи образуют непрерывную поверхность, симметричную относительно оси струи, то в каждый момент времени существует сечение струи, продольная кривизна поверхности в которой равна нулю.

По мере развития процесса эллиптические части приобретают полноту, а перемычка становится тоньше. Но разрыва перемычки в самом тонком месте не происходит. Это можно объяснить тем, что уменьшение толщины перемычки приводит к уменьшению продольной кривизны её поверхности, а поперечная кривизна хоть и увеличивается, но стремится равномерно распределиться вдоль жидкой перемычки. То есть силы поверхностного натяжения стремятся к равномерному распределению вдоль перемычки и равномерному выдавливанию жидкости в выпуклые части струи. Но на концах перемычки с течением времени продольная кривизна поверхности увеличивается и, соответственно, напряжения поверхностных сил в этих областях больше. Это вызывает наряду с вытеснением жидкости в выпуклые части, ещё и обратный поток жидкости к центру перемычки от её концов. В пользу такого толкования явления говорит веретенообразная форма перемычки непосредственно перед отрывом выпуклых частей струи: центральная часть перемычки тоже начинает выпучиваться. Т. о. в области струи, где перемычка соединяется с выпуклой частью, происходит движение жидкости в противоположных направлениях от некоторого условного сечения, что и приводит к отрыву капель от перемычки.

В момент разрушения струи выпуклые части струи близки по форме к полным эллипсоидам вращения и с этого момента они деформируются в сферическую форму. Поэтому деформацию этого участка струи целесообразно рассматривать состоящей из двух этапов:

1. на первом этапе рассматриваемый цилиндрической объём струи под действием сил поверхностного натяжения деформируется в часть эллипсоида вращения с большей полуосью a , совпадающей с осью струи. Причём значение a меняется от бесконечности в начале первого этапа до некоторого конечного значения в конце. Это значение меньше половины длины рассматриваемого цилиндрического объёма струи, то есть эта часть струи после разрыва деформируется в эллиптическую каплю;

2. на втором этапе эллиптическая капля жидкости под действием сил поверхностного натяжения деформируется в сферическую каплю радиуса R (если абстрагироваться от малых радиальных колебаний капли).

В каждый момент времени деформации жидкой струи должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии. Величины малой и большой полуосей связаны законом сохранения массы. Изменение количества движения жидкости при её вытеснении из сужающейся части струи в выпуклую равно суммарному импульсу сил поверхностного натяжения, который равен нулю, в силу симметрии, (осевой и относительно середины эллипсоида) распределения этих сил. Тем самым, закон изменения количества движения выполняется интегрально. Для составления уравнения баланса энергии следует учесть, что в процессе деформации на разных участках струи совершаются разные по знаку работы: на участках сужения совершается положительная работа, на участках расширения отрицательная. В итоге вся работа деформации под действием сил поверхностного натяжения должна быть равна нулю. Потенциальность сил поверхностного натяжения позволяет рассматривать работу деформации струи как сумму работ деформации на каждом из указанных этапов.

Геометрия поверхности деформируемой струи на первом этапе. Рассмотрим цилиндрическую струю жидкости длиной $2L$ и радиусом a , которая деформируется и становится частью эллипсоида. В качестве параметра, отслеживающего этапы процесса деформации, примем безразмерный параметр t , меняющийся от 0 до 1. Для любого значения t поверхность струи можно описать уравнением некоторого эллипсоида, частью которого является эта струя и явля-

ется. Это уравнение имеет вид $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2 + z^2}{\beta^2} = 1$, где α и β длины большой и

малых полуосей, которые изменяются с изменением значения t и связаны законом сохранения массы рассматриваемого жидкого объёма, причём α меняется от бесконечности до некоторого конечного значения, а начальное значение β равно первоначальному радиусу цилиндра a . При деформации цилиндрической струи следует учесть, что точки поверхности струи будут перемещаться по нормали собственно к поверхности.

Рассмотрим уравнение меридионального сечения эллипсоида:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (1)$$

Точка C пересечения эллипса с перпендикуляром $B'B'$ должна перемещаться по нормали к поверхности эллипсоида, то есть траектория точки C должна быть ортогональна эллипсу меридионального сечения в точке его пересечения в каждый момент деформации. В простейшем случае такой траекторией можно принять дугу окружности радиуса a , равного начальному радиусу цилиндрической струи, с центром в точке O . Можно показать, что нормали к этим окружностям и к эллипсу пересекаются под углом, близким к прямому. Тогда значение α в конце первого периода деформации струи должно быть равно $L - a$. Из закона сохранения массы и несжимаемости жидкости следует равенство объёмов цилиндрической струи длины $2L + \Delta L$ и струи, имеющей форму эллипсоида, которую струя принимает после первого этапа деформации:

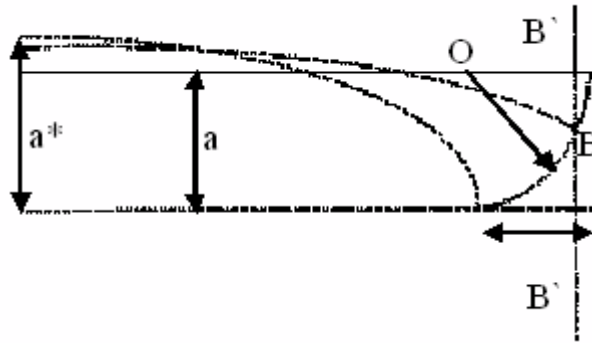


Рис. 2. Траектория концевой точки поверхности струны

$\pi a^2(2L + \Delta L) = 4/3\pi\beta^2(L - a)$. Из этого выражения определяется значение β в конце первого этапа деформации: $\beta = a\sqrt{1.5\frac{L + 0.5\Delta L}{L - a}}$. Таким образом при $t \rightarrow 0$ $\beta \rightarrow a$, $\alpha \rightarrow \infty$, и рассматриваемая часть струи цилиндрическая; при $t = 1$ $\beta = a\sqrt{1.5\frac{L + 0.5\Delta L}{L - a}}$, $\alpha = L - a$ и рассматриваемая часть струи образует эллипсоид вращения, а струя разорвана. Закон изменения β задаёт и изменение уравнения эллиптической поверхности струи, и принят в модели линейным:

$$\beta(t) = a\left(1 + \left(\sqrt{1.5\frac{L + 0.5\Delta L}{L - a}} - 1\right)t\right), \quad 0 < t \leq 1. \quad (2)$$

Зависимость $\alpha(t)$ находится из следующих соображений. Из рис.2. видно, что координаты точки дуги окружности, по которой перемещается концевая точка меридионального сечения поверхности рассматриваемой части струи, равны: $x = L - at$, $y = a\left(1 - \sqrt{2t - t^2}\right)$.

Из уравнения эллипса $\frac{(L - at)^2}{\alpha^2(t)} + \frac{a^2\left(1 - \sqrt{2t - t^2}\right)^2}{\beta^2(t)} = 1$ следует

$$\alpha(t) = \frac{(L - at)\beta(t)}{\sqrt{\beta^2(t) - a^2\left(1 - \sqrt{2t - t^2}\right)^2}}. \quad (3)$$

Таким образом, законы изменения длин полуосей эллипсоида заданы, а следовательно и задано уравнение меняющейся поверхности рассматриваемой части жидкой струи на первом этапе деформации.

Геометрия поверхности деформируемой струи на втором этапе. На втором этапе жидкий объём под действием сил поверхностного натяжения из эллиптического деформируется в сферический. Следовательно поверхность

рассматриваемой части струи так же описывается уравнением эллипсоида вращения с соответствующим образом меняющимися длинами осей.

Пуст параметр t , меняющийся от 0 до 1 характеризует этапы деформации и на втором этапе. При $t = 0$ должны выполняться условия $\beta = a\sqrt{1.5\frac{L+0.5\Delta L}{L-a}}$, $\alpha = L - a$, а при $t = 1$ выполняется равенство $\alpha = \beta = R$, где R – неизвестный радиус сферической капли. Закон изменения значений большей полуоси эллипсоида на втором этапе в модели также принят линейным $\alpha(t) = (R - L + a)t + (L - a)$. Из закона сохранения массы и условия несжимаемости жидкости следует равенство объёмов эллиптической и сферической капли: $\beta^2(t)\alpha(t) = R^3$. Из этого выражения определяется закон изменения

$$\beta(t) = \sqrt{\frac{R^3}{\alpha(t)}}. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение меняющейся поверхности рассматриваемой части жидкой струи задано и на втором этапе деформации.

Работа поверхностных сил при деформации струи. В результате деформации элементарного кольца поверхности эллипсоида под действием сил поверхностного натяжения будет совершена работа

$$\delta A = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dR_1 dR_2 dl. \quad (5)$$

где σ – напряжение сил поверхностного натяжения, R_1 и R_2 – радиус кривизны первого вертикала и меридиональный радиус кривизны поверхности эллипсоида соответственно, $dR_1 dR_2$ – элементарная площадка поверхности эллипсоида, dl – элементарное перемещение точки поверхности эллипсоида в результате деформации. Из рис.3. видно, что $dR_2 = R_2 d\gamma = |d\bar{r}|$, где \bar{r} – радиус-вектор точки поверхности эллипсоида, а γ – угол между осью эллипсоида и нормалью к его поверхности.

Откуда определяем радиус кривизны $R_2 = \frac{|d\bar{r}|}{d\gamma} = \frac{|\dot{\bar{r}}_\theta|}{\dot{\gamma}_\theta}$. Далее,

$$dR_1 = R_1 d\varphi = \frac{|\bar{r}| \sin(\theta)}{\sin(\gamma)} d\varphi, \text{ откуда } R_1 = \frac{|\bar{r}| \sin(\theta)}{\sin(\gamma)}, \text{ где } \varphi \text{ – долгота эллипсоида,}$$

$0 < \varphi \leq 2\pi$; θ – сферическая координата точки поверхности эллипсоида. Перемещение dl точки поверхности эллипсоида перпендикулярно самой поверхности, поэтому $dl = (\bar{n} \dot{\bar{r}}_t) dt$, где \bar{n} – единичная нормаль к поверхности эллипсоида. После подстановки полученных выше выражений в (5) получаем

$$\delta A = \sigma \left(\left| \dot{\bar{r}}_\theta \right| - \frac{|\bar{r}| \sin(\theta)}{\sin(\gamma)} \dot{\gamma}_\theta \right) (\bar{n} \dot{\bar{r}}_\theta) d\theta d\varphi. \quad (6)$$

Из уравнения (1) в полярной системе координат следует:

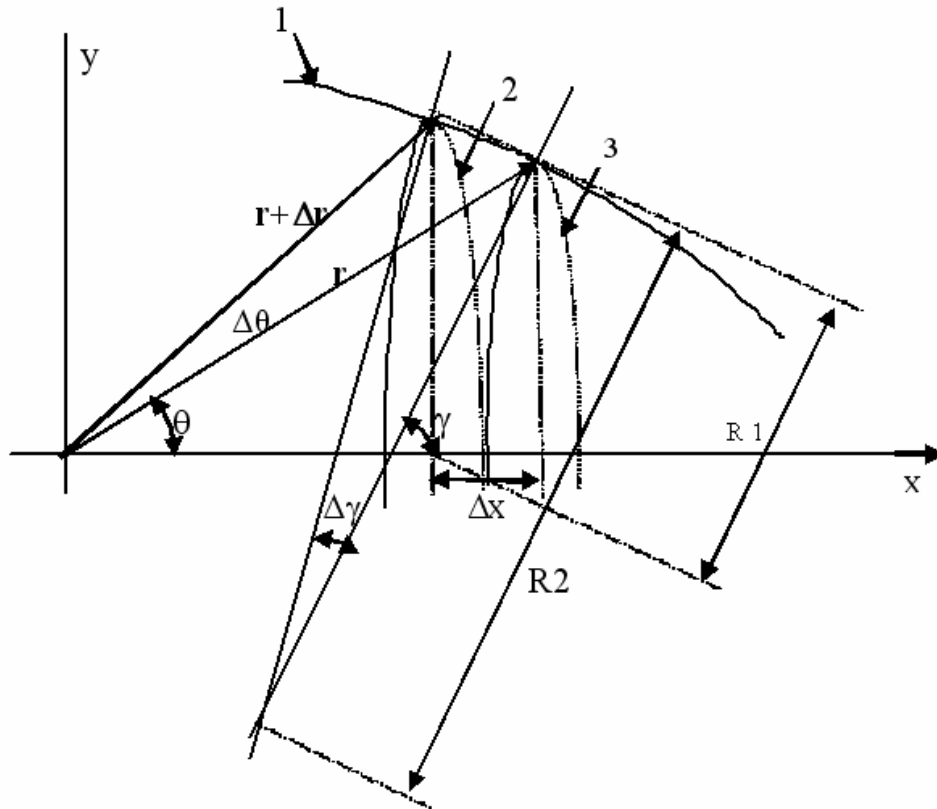


Рис.3 Геометрические характеристики сечения эллипсоида.

1 – контур поверхности эллипсоида;

2, 3 – сечения эллипсоида, перпендикулярные его оси.

$$\bar{r} = \frac{\alpha\beta(\cos(\theta)\bar{i} + \sin(\theta)\bar{j})}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2(\theta) + \beta^2 \cos^2(\theta)}}; |\bar{r}| = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2(\theta) + \beta^2 \cos^2(\theta)}}; \quad (7)$$

$$\dot{\bar{r}}_t = \frac{\dot{\beta}_t \alpha^3 \sin^2(\theta) + \dot{\alpha}_t \beta^3 \cos^2(\theta)}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2(\theta) + \beta^2 \cos^2(\theta)}}(\cos(\theta)\bar{i} + \sin(\theta)\bar{j}); \quad (8)$$

$$\dot{\bar{r}}_\theta = \frac{-\alpha^3\beta(\alpha^2 \sin(\theta)\bar{i} - \beta^2 \cos(\theta)\bar{j})}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2(\theta) + \beta^2 \cos^2(\theta)}}; |\dot{\bar{r}}_\theta| = \frac{\alpha\beta\sqrt{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)}}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2(\theta) + \beta^2 \cos^2(\theta)}}. \quad (9)$$

Нормаль \bar{n} лежит в плоскости меридиана эллипсоида и может быть определена по формуле $\bar{n} = \bar{k} \times \frac{\dot{\bar{r}}_\theta}{|\dot{\bar{r}}_\theta|} = -\frac{\alpha^2 \sin(\theta)\bar{i} - \beta^2 \cos(\theta)\bar{j}}{\sqrt{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)}}$. Тогда элементарная

работа примет вид

$$\delta A = -\sigma \left(|\dot{\bar{r}}_\theta| - \frac{|\bar{r}| \sin(\theta)}{\sin(\gamma)} \dot{\gamma}_\theta \right) |\dot{\bar{r}}_\theta| \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\sqrt{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)}} dt d\theta d\varphi. \quad (10)$$

Далее находим выражение для $\sin(\gamma)$ и $\dot{\gamma}_\theta$. Из рис.3 видно, что

$$\gamma = \varphi - 0.5\pi \text{ и } \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{(\dot{r}_\theta)_y}{(\dot{r}_\theta)_x} = -\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{ctg}(\theta). \text{ Следовательно, } \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \operatorname{tg}(\theta). \text{ От-}$$

сюда

$$\sin(\gamma) = -\cos(\varphi) = -\frac{\alpha^2 \sin(\theta)}{\sqrt{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)}} \text{ и } \dot{\gamma}_\theta = \frac{|\bar{r}|\beta^2}{\sqrt{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)}}.$$

Рассмотрим отдельно слагаемые, входящие в выражение элементарной работы (10).

В первом слагаемом подынтегральная функция

$$|\dot{r}_\theta| |\dot{r}_t| \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\sqrt{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)}} = |\dot{r}_t| |\bar{r}|$$

и имеет смысл элементарной работы силы поверхностного натяжения, обусловленной кривизной первого вертикала.

Второе слагаемое после подстановки выражения для $\sin(\gamma)$ и $\dot{\gamma}_\theta$ имеет

$$\text{вид } |\dot{r}_t| |\bar{r}| \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)} \text{ и имеет смысл элементарной работы силы по-}$$

верхностного натяжения, обусловленной кривизной меридионального сечения.

Из сравнения этих выражений ясно, что элементарная работа, обусловленная продольной кривизной поверхности эллипсоида, составляет некоторую часть элементарной работы, обусловленной его поперечной кривизной. На первом этапе для малых значений t , когда меридиональная кривизна по всей поверхности мала, а так же при $t \rightarrow 1$ в центральных частях эллипсоида эта часть работы мала. Напротив, для второго этапа при $t \rightarrow 1$ эллипсоид обретает полноту, приближаясь к сфере, а, следовательно, и кривизны стремятся к одной величине. Поэтому на втором этапе работа, обусловленная меридиональной кривизной, будет составлять существенную часть работы, обусловленной кривизной первого вертикала. Таким образом, элементарную работу можно представить в виде

$$\delta A = -\sigma |\dot{r}_t| |\bar{r}| \left(1 + \beta^2 \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)} \right) dt d\theta d\varphi. \quad (11)$$

Интегрируя (11) по долготе φ , и принимая во внимание, что

$$|\dot{r}_t| |\bar{r}| = \frac{d}{dt} \left(\frac{|\bar{r}|^2}{2} \right) \text{ получаем выражение для работы деформации струи на каждом}$$

этапе:

$$A = -2\pi\sigma \int_{0\theta_B}^{1\theta_A} \frac{d}{dt} \left(\frac{|\bar{r}|^2}{2} \right) \left(1 + \beta^2 \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)} \right) d\theta dt. \quad (12)$$

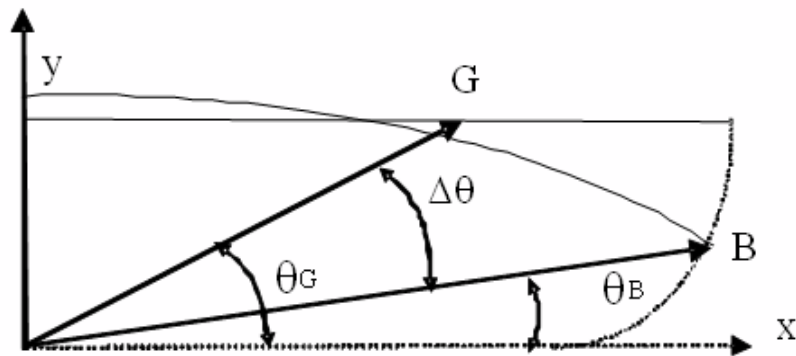


Рис.4 К определению величины $\Delta\theta$

Из рис.4 видно, что на первом этапе преобразования цилиндрической струи в эллиптическую каплю, пределы интегрирования $\theta_B(t)$ и $\theta_A(t)$ зависят от радиус-векторов перемещающихся точек A и B пересечения эллиптического и цилиндрического контуров. На втором этапе преобразования эллиптической капли в сферическую $\theta_B = 0$, $\theta_A = \pi$ для любого значения t , так как точки A и B лежат на оси струи.

Определение работы на первом этапе деформации струи. Найдём зависимость $\theta_B(t)$ и $\theta_A(t)$ для первого этапа. Из Рис.4. ясно, что $\text{tg}(\theta_B) = \frac{y_B}{x_B}$, где (x_B, y_B) – координаты пересечения меридионального сечения эллипсоида и траектории точки B находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ (x - L + a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \end{cases} \quad (13)$$

Из второго уравнения (13) и того факта, что y_B может только убывать до нуля, следует $y_B = a - \sqrt{a^2 - (x_B - L + a)^2}$. Из первого уравнения (13) при подстановке выражения y получаем

$$x_B^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left(2(L - a)x_B + (a - L)^2 - 2a\sqrt{a^2 - (x_B - L + a)^2} - \beta^2 \right) = 0. \quad (14)$$

Выражение $\sqrt{a^2 - (x_B - L + a)^2}$ в пределах изменения x допускает аппроксимацию $(x_B - L + 2a)t$. Подставляя эту замену в (14) находим уравнение для координаты x :

$$x_B^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left(2(L - a)x_B + (a - L)^2 - 2a(x_B - L + 2a)t - \beta^2 \right) = 0. \quad (15)$$

Из двух корней уравнения (15) следует выбирать корень с отрицательным квадратным корнем дискриминанта, так как x может только уменьшаться. Та-

ким образом, известен закон изменения $\theta_B(t) = \text{arctg}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)$. Так как точка A (на рис. 4 не показана) симметрична точке B относительно малой полуоси эллипсоида вращения, то $\theta_A(t) = \pi - \theta_B(t)$.

Найдём интеграл работы (12). Первое слагаемое

$$A_1 = -2\pi\sigma \int_0^1 \int_{\theta_B}^{\theta_A} \frac{d}{dt} \left(\frac{|\bar{r}|^2}{2} \right) d\theta dt. \quad (16)$$

есть, как было указано выше, работа сил поверхностного натяжения, обусловленная кривизной первого вертикала. Используя правило дифференцирования интеграла с переменными пределами, имеем выражение

$$A_1 = -2\pi\sigma \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\theta_B}^{\theta_A} \left(\frac{|\bar{r}|^2}{2} \right) d\theta - \left(\frac{|\bar{r}(\theta_A)|^2}{2} \frac{d\theta_A}{dt} - \frac{|\bar{r}(\theta_B)|^2}{2} \frac{d\theta_B}{dt} \right) \right\} dt.$$

Из симметричности точек A и B следуют равенства $|\bar{r}(\theta_A)| = |\bar{r}(\theta_B)|$ и $\frac{d\theta_A}{dt} = -\frac{d\theta_B}{dt}$. Тогда

$$A_1 = -2\pi\sigma \left\{ \left[\int_{\theta_B(2)}^{\theta_A(1)} \left(\frac{|\bar{r}|^2}{2} \right) d\theta - \int_{\theta_B(0)}^{\theta_A(0)} \left(\frac{|\bar{r}|^2}{2} \right) d\theta \right] + \int_0^1 |\bar{r}(\theta_B)|^2 \frac{d\theta_B}{dt} dt \right\}. \quad (17)$$

Рассмотрим значения пределов интегрирования и подинтегральных функций в (17):

$$\theta_B(0) = \text{arctg} \frac{y_B(0)}{x_B(0)} = \text{arctg} \left(\frac{a}{L + 0.5\Delta L} \right); \quad (18)$$

$$\theta_B(1) = \text{arctg} \frac{y_B(1)}{x_B(1)} = \text{arctg} \left(\frac{0}{L - a} \right) = 0;$$

$$|\bar{r}(0)|^2 = \frac{\alpha^2(0)\beta^2(0)}{\alpha^2(0)\sin^2(\theta) + \beta^2(0)\cos^2(\theta)}; \quad (19)$$

$$|\bar{r}(1)|^2 = \frac{\alpha^2(1)\beta^2(1)}{\alpha^2(1)\sin^2(\theta) + \beta^2(1)\cos^2(\theta)}.$$

Подставим (18) и (19) в (15) и, учитывая, что подинтегральная функция $\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\sin^2(\theta) + \beta^2\cos^2(\theta)}$ имеет первообразную $\alpha\beta \text{arctg} \left(\frac{\beta}{\alpha} \text{tg}(\theta) \right)$, получим интеграл по переменной θ :

$$A_{1\theta} = -2\pi\sigma \frac{\alpha(1)\beta(1)}{2} \left(\text{arctg} \frac{\beta(1)}{\alpha(1)} \text{tg}(\theta_A(1)) - \text{arctg} \frac{\beta(1)}{\alpha(1)} \text{tg}(\theta_B(1)) \right) +$$

$$+2\pi\sigma \frac{\alpha(0)\beta(0)}{2} \left(\arctg \frac{\beta(0)}{\alpha(0)} \operatorname{tg}(\theta_A(0)) - \arctg \frac{\beta(0)}{\alpha(0)} \operatorname{tg}(\theta_B(0)) \right). \quad (20)$$

Учтём, что $\alpha(t) = \infty$ при $t \rightarrow 0$. Тогда выражение

$$\frac{\alpha(0)\beta(0)}{2} \left(\arctg \frac{\beta(0)}{\alpha(0)} \operatorname{tg}(\theta_A(0)) - \arctg \frac{\beta(0)}{\alpha(0)} \operatorname{tg}(\theta_B(0)) \right)$$

приблизённо равно $-\frac{\beta^2(0)}{2} \operatorname{tg}(\theta_B(0))$.

Подставим $\beta(0) = a$, $\alpha(t) = \infty$ при $t \rightarrow 0$, $\beta(1) = a \sqrt{1.5 \frac{L + 0.5\Delta L}{L - a}}$, $\alpha(1) = \frac{(L - a)\beta(1)}{\beta^2(1) - a^2}$

в (20) и получим

$$A_{10} = \pi\sigma \frac{a^3}{2L + \Delta L}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь интеграл $A_{1t} = -2\pi\sigma \int_0^1 |\vec{r}(\theta_B)|^2 \frac{d\theta_B}{dt} dt$ из (17). Произ-

водная $\frac{d\theta_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\arctg \frac{y_B}{x_B} \right) = \frac{x_B \dot{y}_B - \dot{x}_B y_B}{|\vec{r}|^2}$.

Используя (13),

$$A_{1t} = -2\pi\sigma \int_L^{L-a} \frac{x_B(x_B - L + a)}{\sqrt{a^2 - (x - L + a)^2}} - \left(a - \sqrt{a^2 - (x_B - L + a)^2} \right) dx. \quad (22)$$

Подынтегральная функция (17) имеет первообразную и в окончательном виде $A_{1t} = 2\pi\sigma a \left(\frac{1-\pi}{2} a - L \right)$. Таким образом, на первом этапе деформации струи работа силы поверхностного натяжения, обусловленной кривизной первого вертикала равна

$$A_1 = 2\pi\sigma a \left(\frac{a^2}{2L + \Delta L} - \frac{1-\pi}{2} a - L \right). \quad (23)$$

Рассмотрим второе слагаемое (12), которое выражает работу силы поверхностного натяжения, обусловленную кривизной меридионального сечения

$$A_2 = -2\pi\sigma \int_0^{\theta_A} \int_{\theta_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{r}|^2}{2} \right) \left(\beta^2 \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)} \right) d\theta dt. \quad (24)$$

Подынтегральная функция (28) отличается от подынтегральной функции (16) множителем $p(\theta, t) = \beta^2 \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)}$. Из Рис.5., на котором пред-

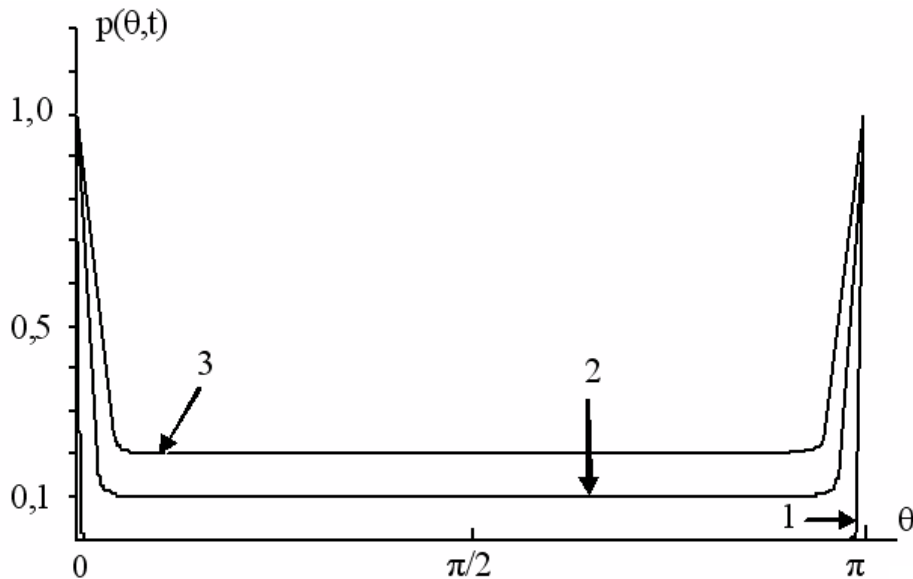


Рис.5 Графики функции $p(\theta, t)$:

1 – кривая при $t \rightarrow \infty$, 2 – кривая при $t = 0,5$, 3 – кривая при $t = 1$.

ставлен график этой функции для $a = 1$, видно, что её значения лежат в пределах интервала $(0,1)$.

Проведём оценку влияния множителя p на результат интегрирования (28). Из (11) ясно, что функция $p = p(\theta, t)$ есть отношение элементарных работ сил поверхностного натяжения, обусловленных кривизной меридионального сечения и кривизной первого вертикала эллипса. Также из геометрических соображений ясно, что кривизна меридионального сечения эллипса с отношением $\frac{\beta}{\alpha} \simeq 4.5$ при θ , даже не сильно отличающихся от 0 и π , будет мало меняться

вдоль эллипса, и её значение можно принять равным значению при $\theta = \frac{\pi}{2}$. На-

против, при значениях θ , очень близких к 0 и π кривизна меридионального сечения эллипса будет сопоставима с кривизной его первого вертикала. Разобьём интервал интегрирования на три диапазона: $(\theta_B, \theta_B + \Delta\theta)$, $(\theta_B + \Delta\theta, \theta_A - \Delta\theta)$ и $(\theta_A - \Delta\theta, \theta_A)$, где $\Delta\theta$ – интервал, на котором график $p(\theta, t)$ сильно отличается от горизонтального. Представим работу A_2 в виде суммы $A_2 = A_{21} + A_{22}$ и рассмотрим каждое слагаемое. Первое слагаемое

$$A_{21} = -2\pi\sigma \int_0^1 \int_{\theta_B + \Delta\theta}^{\theta_A - \Delta\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{r}|^2}{2} \right) \left(\beta^2 \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)} \right) d\theta dt.$$

На интервале $(\theta_B + \Delta\theta, \theta_A - \Delta\theta)$ $p(\theta, t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$, следовательно,

$$A_{21} = -2\pi\sigma \int_0^1 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \int_{\theta_B + \Delta\theta}^{\theta_A - \Delta\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{r}|^2}{2} \right) d\theta dt \text{ и согласно соотношениям (18-21)}$$

$$A_{21} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 A_{1\theta}.$$

Второе слагаемое имеет вид

$$A_{22} = -2\pi\sigma \int_0^{1-\theta_B+\Delta\theta} \int_{\theta_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{|\bar{r}|^2}{2} \right) \left(\beta^2 \frac{\alpha^2 \sin(\theta) + \beta^2 \cos(\theta)}{\alpha^4 \sin^2(\theta) + \beta^4 \cos^2(\theta)} \right) d\theta dt$$

в силу симметричности точек A и B относительно малой полуоси эллипсоида вращения. Согласно (18) и принимая во внимание отношение $L = 4.51 \times (2a)$, находим, что θ_B с течением времени меняется в диапазоне $(0; 0.11)$. Таким образом, в окрестности 0 и π функцию p можно заменить выражением

$$p(\theta, t) = 1 + \frac{\alpha^2 (\beta^4 - \alpha^2) \theta^2}{\beta^4} \text{ и } A_{22} \approx -2\pi\sigma \int_0^1 \left(|\bar{r}(\theta_B, t)|^2 \frac{d(\Delta\theta)}{dt} \right) dt.$$

Из рис.6. видно, что $\text{tg}(\theta_G) = \text{tg}(\theta_B + \Delta\theta)$, откуда $\Delta\theta \approx \frac{ax - (L-a)y}{ay - (L-a)x}$. То-

гда
$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} = \frac{(a^2 + (L-a)^2)(\dot{x}y - y\dot{x})}{(ay - (L-a)x)^2 |\bar{r}|^2}.$$

Если представить $\frac{(a^2 + (L-a)^2)}{(ay - (L-a)x)^2} = q|\bar{r}|^2$, то $A_{21} = qA_{1t}$ и $A_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 A_{21} + qA_{22}$.

При $t \rightarrow 0$, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \rightarrow 0.05$, а при $t = 1$, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \rightarrow 0.13$, а величина $q \leq 0.0045$. Поэтому справедливо $0.05A_1 < A_2 < 0.13A_1$ и работу на первом этапе деформации можно представить в виде

$$A_1 = 2\pi\sigma a(1+p) \left(\frac{a^2}{2L + \Delta L} - \frac{1-\pi}{2} a - L \right), \quad (25)$$

где $0.05 < p < 0.13$.

Определение работы на втором этапе деформации струи. На втором этапе процесса эллиптическая капля, оторвавшаяся от струи, продолжает деформироваться под действием сил поверхностного натяжения в силу их неоднородного распределения по поверхности, пока не достигнет сферической формы.

Работу этой деформации \tilde{A} описывает интеграл (12) с соответствующими пределами интегрирования и значениями коэффициентов подынтегральной функции. Как выше было отмечено, пределы интегрирования остаются постоянными на протяжении всего процесса и равны: $\theta_B = 0$, $\theta_A = \pi$. Коэффициенты подынтегральных выражений определяются на основании (4) и (4'). Интегрирование первого слагаемого (12) даёт выражение (20) со следующими подынте-

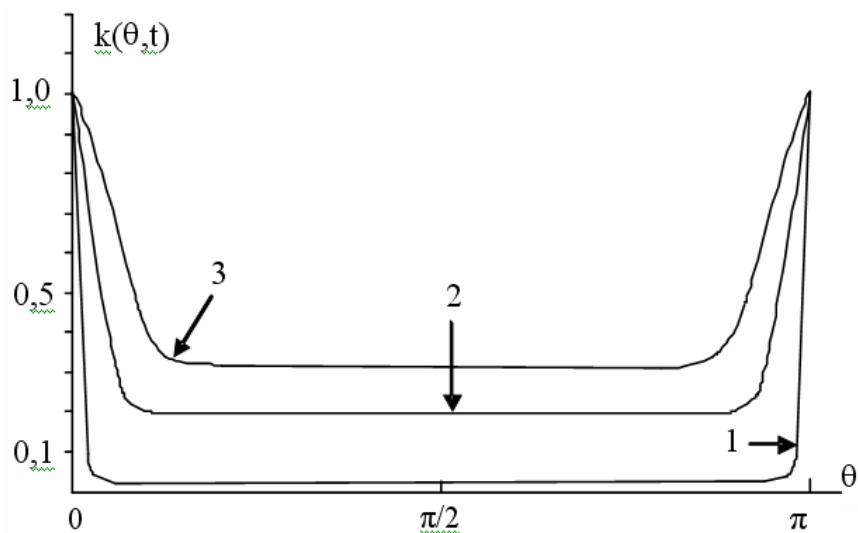


Рис.6. Графики функции $k(\theta, t)$:

1 – кривая при $t \rightarrow \infty$, 2 – кривая при $t = 0.5$, 3 – кривая при $t = 1$.

гральными выражениями: $\alpha(0) = (L - a)$, $\beta(0) = a\sqrt{1.5\frac{L+0.5\Delta L}{L-a}}$, $\alpha(1) = \beta(1) = R$.

Подставляя выше найденные значения в (20) получаем

$$\tilde{A}_1 = \pi\sigma \left(R^2\pi - a\pi\sqrt{1.5\frac{L+0.5\Delta L}{L-5}} \right). \text{ Аналогично случаю, рассмотренному в пре-}$$

дыдущем пункте, второе слагаемое (12) отличается от первого множителем $k(\theta, t)$ и представляется в виде $\tilde{A}_2 = k\tilde{A}_1$, где $0.78 < k < 0.92$. Коэффициент k равен отношению элементарных работ сил поверхностного натяжения, обусловленных кривизной меридионального сечения и кривизной первого вертикала эллипсоида. В течение 80% времени деформации эллипсоида в сферу эти кривизны имеют разный порядок значений, и этот случай разобран выше. За последние 20% времени деформации кривизна меридионального сечения значительно увеличивается, а кривизна первого вертикала уменьшается к одной величине — кривизне сферы.

Таким образом, работа сил поверхностного натяжения, вызвавших деформацию цилиндрической струи и в итоге её разрыв на капли имеет следующий вид

$$A = 2\pi\sigma \left[a(1+p) \left(\frac{a^2}{2L+\Delta L} - \frac{1-\pi}{2}a - L \right) - (1+k)\pi \left(R^2 - a\sqrt{1.5\frac{L+0.5\Delta L}{L-a}} \right) \right]. \quad (26)$$

Определение диаметра капли и расстояния между соседними каплями. Выражение работы (26), приравненное нулю и закон сохранения массы жидкости дают систему уравнений для определения радиуса капли и расстояния между соседними каплями разорвавшейся струи. Введём обозначения

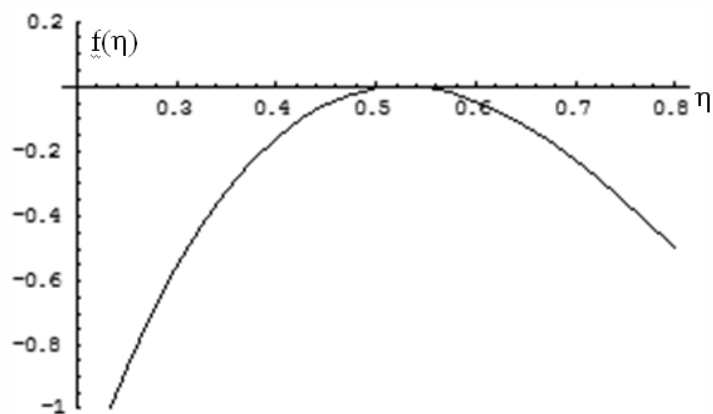


Рис. 7. График зависимости $f(p, k, \eta)$ при $p = 0.1, k = 0.86$

$\eta = \frac{a}{R} \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{2L} \quad L = 4.51a$. В безразмерном виде уравнения баланса энергии и массы примет вид

$$f(p, k, \eta) = (1 + p) \left(1.5\eta^5 - (1 - \pi + 9.02)\eta^2 \right) - (1 + k) \pi \left(1 - \eta \sqrt{\frac{3.51}{\eta}} \right) = 0, \quad (27)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \frac{1}{9.02\eta^3} - 1$$

Анализ первого уравнения (27) показал, что в окрестности точек, со значением близким к ожидаемому отношению $\frac{a}{R}$, функция $f(p, k, \eta)$ имеет максимум. Для допустимых диапазонов значений параметров p и k функция $f(p, k, \eta)$, касается оси абсцисс в точке $\eta \approx 0.531$. Соответствующее этому корню значение $\varepsilon = -0.013$, то есть абсолютная величина $\Delta L = 0.117$ и, следовательно, $2L + \Delta L = 4.393 \times (2a)$, что сопоставимо со значениями расстояния между каплями, полученными Саваром и Плато [3].

Заключение. Построена математическая модель процесса разрушения струи жидкости под действием поверхностных сил на основе интегральных уравнений баланса энергии и массы. Полученная модель позволяет оценить величину радиуса сферической капли, образующейся в результате разрушения струи, а также оценить расстояние между соседними каплями.

Литература:

1. Стретт Дж. В. (Рэлей). Теория звука. Т.2. – М.: ГИТТЛ. 1955. – 455с.
2. Альбом течений жидкости и газа: Пер.с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1986. – 184с., ил.
3. Savart M. // Ann. de Chimie – 1883, v.53. P. 337.
4. Асланов С.К. К теории распада жидкой струи на капли. // Журнал технической физики, РАН. – С.-Петербург, – 1999. –Т. 69, Вып. 11. – С.132-134.

Асланов С.А., Косой М.Б.

Моделювання розпаду тонкого рідкого струменя на краплі

АНОТАЦІЯ

На основі рівнянь балансу маси і енергії побудована замкнена модель процесу безперервної деформації і подальшого розпаду тонкого рідкого струменя на краплі під впливом сил поверхневого натягу. Побудована модель включає дві стадії безперервної деформації ділянки циліндричного струменя: деформація слабо обуреної поверхні синусоїдального типу в краплю форми еліпсоїда обертання з кінцевими значеннями кривизни; деформація еліптичної краплі в сферичну. Отримані вирази робіт сил поверхневого натягу на кожному етапі деформування. Виконаний математичний аналіз рівняння балансу маси і енергії дозволив однозначно визначити відносну величину середнього діаметра утворених крапель і відстань між ними. Отримані результати добре узгоджуються з відомими експериментальними дослідженнями Савара і Плато.

Aslanov S.A., Kosoy M. B.

Model operation of a disintegration of a thin fluid stream on drops

SUMMARY

On the basis of weight and energy balance equations self-contained model of the continuous deformation process and the subsequent disintegration of a thin fluid stream on drops under the influence of surface tension forces is constructed. The constructed model includes two stages of the continuous deformation of the site of a cylindrical stream: deformation of poorly indignant surface of sine type to an elliptic drop with terminating values of curvature; deformation of an elliptic drop in coextensive spherical. Expressions of works of surface tension forces at each stage of deformation are received. The made calculus of the equation of balance of weight and energy allowed to uniquely determinate the relative size of effective diameter of the formed drops and distances between them. The received results well will be coordinated with the known experimental observations of Savart and Plateau.